

Projekt *Zajedno kroz prirodoslovlje*

# Linearna funkcija i vektori u eksperimentima

Priručnik za nastavnike

Izdavač



Gimnazija Petra Preradovića,  
Virovitica

**Naslov** Priručnik za nastavnike fakultativnog predmeta *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima*

**Radni naziv kurikuluma** *Linearna funkcija i vektori u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u obradi eksperimenata u fizici*

**Izdavač** Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica

**Za izdavača** Jasminka Viljevac

**Urednica** Jasminka Viljevac

**Autori** Mirjana Steiner, Branka Inđić, Dragan Klement, Željka Korlević, Marija Vidalina

**Supervizori** Ružica Vuk, Vlado Halusek, Danijel Jukopila, Aneta Copić, Mihaela Kelava

**Supervizorica za jezik i gramatiku** Izabela Babić

**Oblikovale naslovnicu i grafički uredile** Mateja Uzelac, Nikolina Hečimović

**Dizajn logotipa projekta** Grafoprojekt, Virovitica

**Podatak o izdanju** 1. izdanje

**Mjesto i godina izdavanja** Virovitica, 2016.

**Naziv tiskare i sjedište** Grafoprojekt, Virovitica

**CIP zapis je dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 140602056.**

**ISBN 978-953-8147-00-5**

Ova publikacija rezultat je projekta *Zajedno kroz prirodoslovlje* koji su provele nositelj projekta Gimnazija Petra Preradovića iz Virovitice s partnerima Srednjom školom Marka Marulića Slatina i Srednjom školom „Stjepan Ivšić“ Orahovica od 23. listopada 2015. do 23. listopada 2016. godine. Projekt je u cijelosti financirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda, a financijska sredstva u iznosu od 2 260 369,46 kn osigurana su temeljem natječaja *Promocija kvalitete i unaprjeđenja sustava odgoja i obrazovanja na srednjoškolskoj razini*.

Sadržaj ove publikacije isključiva je odgovornost Gimnazije Petra Preradovića, Virovitica.

Kurikulum i svi radni materijali su razvojni. Mogu se dopunjavati, popravljati i mijenjati.

Ova publikacija dostupna je na hrvatskom jeziku u elektroničkom obliku na mrežnoj stranici <http://www.gimnazija-ppreradovica-vt.skole.hr/>.

Riječi i pojmovni sklopovi koji imaju rodno značenje, bez obzira na to jesu li u tekstu korišteni u muškom ili ženskom rodu, odnose se na jednak način na muški i ženski rod.

©Sva prava pridržana. Nijedan dio ove publikacije ne smije biti objavljen ili pretiskan bez prethodne suglasnosti nakladnika i vlasnika autorskih prava.



Projekt *Zajedno kroz prirodoslovlje*

# Linearna funkcija i vektori u eksperimentima

PRIRUČNIK ZA NASTAVNIKE

Mirjana Steiner, prof. matematike i fizike, prof. mentor

Branka Inđić, prof. matematike i fizike, prof. savjetnik

Dragan Klement, prof. matematike i fizike, prof. mentor

Željka Korlević, dipl. ing. matematike, prof. savjetnik

Marija Vidalina, mag. educ. math. et inf.

Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica  
Virovitica, 2016.



## SADRŽAJ

PREDGOVOR .....	6
UVOD .....	8
PRIJEDLOG IZVEDBENOG KURIKULUMA.....	10
METODIČKE PREPORUKE .....	13
PREPORUKE ZA VREDNOVANJE USVOJENOSTI ISHODA .....	14
1. GEOGEBRA.....	16
2. LINEARNA FUNKCIJA.....	44
2.1. Primjeri .....	46
2.2. Zadatci za učenike za rad na satu .....	52
3. VEKTORI.....	54
3.1. Osnovni pojmovi o vektorima .....	54
3.2. Računske operacije s vektorima .....	56
3.2.1. Zbrajanje vektora po pravilu trokuta.....	56
3.2.2. Zbrajanje vektora po pravilu paralelograma .....	57
3.2.3. Množenje vektora skalarom .....	58
3.2.4. Linearna kombinacija vektora .....	58
3.2.5. Prikaz vektora u koordinatnom sustavu .....	59
3.2.6. Skalarni umnožak vektora .....	60
3.3. Zadatci za učenike za rad na satu .....	62
4. DODATAK: GEOGEBRA APLETI.....	64
4.1. e-udžbenik .....	64
Aplet 1. Linearna funkcija: Primjer 2.....	65
Aplet 2. Pravac .....	66
Aplet 3. Funkcija zadana po dijelovima.....	68
4.2. Apleti na Moodle-u.....	69
5. LINEARNA FUNKCIJA U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA .....	70
5.1. Obrada rezultata mjerenja i račun pogrešaka .....	70
5.1.1. Vrste pogrešaka .....	70
5.1.2. Račun pogrešaka za direktno mjerene veličine.....	71
5.1.3. Račun pogrešaka za indirektno određene veličine.....	72
5.2. Istraživanja gibanja pod utjecajem stalne sile.....	73
5.3. Elastična sila i određivanje konstante elastičnosti opruge.....	78
5.4. Period jednostavnog njihala .....	82
5.5. Električni otpor .....	86
6. VEKTORI U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA .....	96

6.1.	Rastavljanje sile na kosini na njezine komponente .....	96
6.2.	Složena gibanja .....	100
7.	LINEARNA FUNKCIJA U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA U GEOGEBRI .....	106
7.1.	Istraživanja gibanja pod utjecajem stalne sile – GeoGebra .....	106
7.2.	Elastična sila i određivanje konstante elastičnosti opruge – GeoGebra .....	108
7.3.	Period jednostavnog njihala – GeoGebra.....	109
7.4.	Električni otpor – GeoGebra.....	113
8.	VEKTORI U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA U GEOGEBRI .....	117
8.1.	Rastavljanje sile na kosini na njezine komponente – GeoGebra.....	117
8.2.	Složena gibanja – GeoGebra.....	118
	LITERATURA.....	122

## PREDGOVOR

U vašim je rukama priručnik za nastavnike fakultativnog predmeta nastao kao rezultat projekta *Zajedno kroz prirodoslovlje*, a financirala ga je Europska unija iz Europskog socijalnog fonda u okviru natječaja *Promocija kvalitete i unaprjeđenje sustava odgoja i obrazovanja na srednjoškolskoj razini*. Vrijednost projekta bila je 2 260 369,46 kuna, a trajao je od 23. 10. 2015. do 23. 10. 2016. godine.

Projekt *Zajedno kroz prirodoslovlje* prijavila je Gimnazija Petra Preradovića iz Virovitice, a partneri su joj bili Srednja škola Marka Marulića iz Slatine i Srednja škola „Stjepan Ivšić“ iz Orahovice.

Cilj projekta bio je uspostava programskih, kadrovskih i materijalnih uvjeta u gimnazijama Virovitičko-podravске županije koji će učenicima omogućiti stjecanje dodatnih kompetencija u području prirodoslovlja, matematike i informacijsko-komunikacijskih tehnologija.

Kurikulumi su zasnovani na ishodima učenja i izrađeni prema principima Hrvatskog kvalifikacijskog okvira (Zakon o HKO-u, MZOS 2013.) čime izravno doprinose njegovom daljnjem razvoju i provedbi.

Suradnički su ih izrađivali nastavnici Matematike, Informatike i prirodoslovnih predmeta triju gimnazija, stručnjaci na polju pedagogije i metodologije te profesori sveučilišnih kolegija na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Ciljne skupine ovog projekta jesu: nastavnici, učenici, stručni suradnici, vanjski stručnjaci i ravnatelji.

Sudjelovanjem ravnatelja triju gimnazija u provedbi projekta naglašena je važnost modernizacije kurikuluma za obrazovne ustanove. Ojačani kapaciteti gimnazija za izradu i provedbu inovativnih fakultativnih nastava (ljudski i materijalni potencijali) čine ustanovu atraktivnom i poželjnom za nastavak obrazovanja svim učenicima zainteresiranim za prirodoslovlje.

Kako bi podržali razvoj novih fakultativnih programa u školama, ali i doprinijeli razvoju programa svojim stručnim znanjima iz područja pedagogije/psihologije, stručni suradnici iz gimnazija sudjelovali su u edukacijama za razvoj kurikuluma temeljenog na ishodima učenja i unaprjeđenje nastavnih kompetencija. Stečenim znanjem i vještinama pružili su podršku ostalim nastavnicima za razvoj i implementaciju drugih fakultativnih programa, ali i prilagođavanju postojećih nastavnih programa zahtjevima HKO-a.

Postojeći su gimnazijski programi zastarjeli i nedovoljno su prilagođeni promjenama u suvremenom društvu. Naročito zabrinjava zastarjelost u prirodoslovnom i ICT području. Rezultati PISA istraživanja upućuju da su rezultati hrvatskih 15-godišnjaka ispod prosjeka u matematičkoj i prirodoslovnoj pismenosti. Često učenici nisu sposobni povezati znanja iz različitih nastavnih predmeta ili to čine površno i nesustavno. Znanja stečena u gimnazijskom nastavnom procesu uglavnom su teorijska i udaljena od neposredne životne zbilje. Stoga se nameće potreba za povezivanjem škole i života, znanja i vrijednosti, znanstvenih spoznaja i prakse.

Posljednjih godina učinjene su značajne promjene u smjeru poboljšanja hrvatskog obrazovnog sustava u predškolskom i osnovnoškolskom sektoru (HNOS, NOK), srednjem školstvu (reforma strukovnog obrazovanja, državna matura, NOK) i visokom školstvu (Bologna proces), a dovršen je i *Hrvatski kvalifikacijski okvir* (HKO) sukladno *Europskom kvalifikacijskom okviru* (EQF). Međutim gimnazijski kurikulum nije značajno strukturno promijenjen već pedesetak godina. Aktualni nastavni programi za gimnazije potječu iz 1994. i 1995. godine, a nastavni planovi iz 1995. godine i nisu zasnovani na ishodima učenja prema instrumentariju Hrvatskoga kvalifikacijskog okvira. Predmetna područja slabo su povezana, iako HKO i NOK omogućuju i potiču smisleno povezivanje svih sastavnica sustava u

skladnu cjelinu. Nedostatno su zastupljeni novi oblici učenja i poučavanja, a osobito primjerena upotreba suvremenih tehnologija u poučavanju i učenju.

Naš doprinos promjenama koje svi očekuju jest osam novih kurikuluma fakultativne nastave s priručnicima za nastavnike, priručnicima za učenike te digitalnim radnim materijalima u Moodle-u.

Radni nazivi kurikuluma govore o sadržaju kurikuluma i o smjeru kojim idemo: Zemlja u geografiji, fizici i matematici, Linearna funkcija i vektori u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u obradi eksperimenata u fizici, Funkcije u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u prirodoslovlju, Biološki sustavi u ekologiji i matematici, Biologija s kemijom u životnim procesima, Termodinamika i kvantna mehanika u fizici i kemiji u računima i eksperimentima, Fizikalni eksperimenti i modeli kao osnova rada tehničkih uređaja i Informatika. Nazivi fakultativnih predmeta koji su iz njih proizašli jesu:

1. *Geografija rizika i klimatske promjene*
2. *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima*
3. *Funkcije u prirodoslovlju*
4. *Biološki sustavi i matematika*
5. *Biologija s kemijom u životnim procesima*
6. *Fizikalna kemija*
7. *Fizikalni eksperimenti*
8. *Informatika u multimediji i dizajnu.*

## UVOD

Fakultativni predmet *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* nastao je iz potrebe da se pokaže neodvojiva veza između proučavanja sadržaja predmeta matematike i fizike te da se ukaže kako taj zadatak može biti lakše i zanimljivije izvršen korištenjem modernih tehnologija. Radni naziv kurikulumu *Linearna funkcija i vektori u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u obradi eksperimenata u fizici* opisuje upravo tu ideju tima koji je osmislio kurikulum.

Matematika je zapravo jezik fizike i neodvojivost matematike i fizike kao znanosti vidljiva je na svakom nivou: iskazivanje iznosa fizikalnih veličina pomoću brojeva – podataka s brojevnog pravca ili kroz koordinatni sustav, zorni prikaz pozitivnih i negativnih veličina (predznak broja), uspoređivanje fizikalnih veličina, grafičko prikazivanje fizikalnih međuovisnosti pomoću linearnih i nelinearnih funkcija – sve je to matematički jezik svijeta oko nas.

Kako znanost (fizika) poboljšava naš svakodnevni život, vrlo je zanimljivo prikazano u knjizi *The Physics of Materials - How Science Improves Our Lives* (The National Academies Press, 1997. engl.). Priča prati poslovnu ženu koja putujući prema aerodromu autom (izrađen od sintetiziranih materijala) telefonira mobitelom (na bazi složene poluvodičke elektronike) sinu, koji rola (kotači od polimera) prema fakultetu slušajući glazbu s CD-a (od materijala za optičku pohranu podataka koje čitaju poluvodički laseri) da mu kaže kako baka leži u bolnici gdje joj ugrađuju umjetni kuk (od biomaterijala) nakon pregleda magnetskom rezonancijom (koja se temelji na supravodljivim magnetima) i konzultacije liječnika (putem interneta i svjetlovoda). Na aerodromu ulazi u avion (od superslitina), sjeda na svoje mjesto i otvara notebook (koji ima ekran s tekućim kristalima i procesor koji ovisi o magnetskim materijalima i silikonskoj tehnologiji).

Danas se svi poput junakinje ove knjige služimo blagodatima moderne tehnologije i ne primjećujući što nas okružuje, često to ni ne pokušavajući razumjeti i nakon toga još korisnije upotrijebiti. Učenici koji odaberu predmet *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* načinit će prvi korak prema osvježavanju neposredne okoline i time dobiti priliku da proučavanjem neposredne stvarnosti, uz pomoć matematičkih alata i kompjutorske tehnologije lakše razumiju svijet. Također će naučiti osnovne metodologije istraživačkog rada koji je temelj u razvoju znanosti.

Predmet je namijenjen učenicima drugog i trećeg razreda gimnazija i strukovnih škola, i to ne samo onima koji planiraju nastaviti studij na prirodoslovnim fakultetima jer je osnovna metodologija istraživačkog rada zajednička svima.

Materijali pripremljeni tijekom projekta namijenjeni su učenicima i nastavnicima: nastavnicima kao podloga za pripremanje izvedbe, ali i kao ideja za neki novi kreativni pristup temama iz kurikulumu; učenicima kao pomoć u savladavanju sadržaja i putokaz za daljnji napredak.

Osim klasične nastave predviđeno je učenje na daljinu korištenjem platforme za e-poučavanje. Učenici i nastavnici na taj način dobivaju mogućnost individualizacije nastave i prilagodbe navikama i mogućnostima svakog učenika, što je posebno dragocjeno za naše učenike putnike. Učenicima se nudi samostalnost putem online rada u njihovim domovima, u količini i terminima koji im najbolje odgovaraju. Nastavnicima je omogućeno praćenje rada svakog učenika i vrednovanje individualnog doprinosa realizaciji pojedinog zadatka.

Kurikulum fakultativnog predmeta *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* doprinosi kvalitetnijem obrazovanju na više razina. Temeljen je na ishodima učenja prema metodologiji HKO-a, uvodi

suvremene tehnologije u metode poučavanja i potiče učenike da tehnologiju koriste u svrhu lakšeg i kvalitetnijeg učenja te omogućava stjecanje novih kompetencija učenika u različitim područjima. Time značajno doprinosi razvoju učenika kao cjelovite osobe i potiče osobni rast svakog pojedinca.

Kurikulum i svi radni materijali su razvojni. Mogu se dopunjavati, popravljati i mijenjati.

Želimo vam uspjeh u radu.

## PRIJEDLOG IZVEDBENOG KURIKULUMA

DOMENA/CJELINA	TEMA/POPIS EKSPERIMENATA	ISHODI	PREDVIĐENI BROJ SATI	NAPOMENA
<b>1. GEOGEBRA</b>	Instalacija GeoGebre	Instalira GeoGebru	0.5	Preporučuje se pri prvom susretu s učenicima pokazati instalaciju GeoGebre.
	Prilagodba osnovnih postavki	Prilagođava osnovne postavke (boju, veličinu, koordinatnu mrežu, koordinatne osi...)	1.5	
	Matematički objekti u GeoGebri	Crta točke, pravce i vektore direktno i koristeći traku za unos. Crta graf dane funkcije. Iščitava sjecišta grafa linearne funkcije s koordinatnim osima. Iščitava nagib pravca. Iščitava komponente vektora.	6	
	Dinamika i interaktivnost u GeoGebri	Koristi gotove GeoGebra aplete pri učenju. Koristi e-udžbenik i rješava postavljene zadatke na službenoj stranici GeoGebre (u grupi) te na Moodleu. Izrađuje dinamičke aplete s klizačima.	12	Neki od apleta objašnjeni su u poglavlju 4. DODATAK: GEOGEBRA APLETI.
<b>2. LINEARNA FUNKCIJA</b>	Linearna funkcija	Prepoznaje linearnu funkciju i pravac kao njezin graf. Izračunava vrijednost linearne funkcije u pojedinoj točki. Crta graf linearne funkcije. Prepoznaje i tumači graf konstantne funkcije. Iščitava osnovne karakteristike linearne funkcije iz njenog grafa (linearni rast ili pad, brzina promjene).	10	

		Povezuje matematičko znanje s rezultatima fizikalnog eksperimenta (prijedeni put jednolikog gibanja linearno ovisi o vremenu $s(t) = v \cdot t$ , brzina kod jednolikog gibanja linearno ovisi o vremenu $v(t) = v_0 + a \cdot t$ ).		
<b>3. VEKTORI</b>	Osnovni pojmovi o vektorima	Objašnjava osnovne pojmove vezane uz vektore. Određuje zbroj zadanih vektora koristeći pravilo trokuta, odnosno pravilo paralelograma.	4	
	Računske operacije s vektorima	Određuje umnožak vektora i skalara. Opisuje i objašnjava ulogu jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ u koordinatnom sustavu. Prikazuje vektore i njihovu linearnu kombinaciju u koordinatnom sustavu. Primjenjuje znanje o vektorima prilikom rješavanja zadataka u fizici (prikazuje jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno gibanje pomoću vektora u koordinatnom sustavu, koristi paralelogram sila).	6	
<b>4. LINEARNA FUNKCIJA U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA</b>	Obrada rezultata mjerenja i račun pogrešaka	Obrađuje rezultate mjerenja. Provodi izračun pogreške.	2	
	Istraživanja gibanja pod utjecajem stalne sile	Koristi podatke iz tablice za izradu grafičkog prikaza. Samostalno i ispravno objašnjava grafički prikaz kao funkciju ovisnih fizikalnih veličina.	2	
	Elastična sila i određivanje konstante elastičnosti opruge	Kvalitetno interpretira rezultat eksperimenta u grafičkom obliku. Ovisnost veličina zapisuje u algebarskom obliku.	2	
	Period jednostavnog njihala		2	
	Električni otpor		2	

<b>5. VEKTORI U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA</b>	Rastavljanje sile na kosini na njezine komponente	Koristi podatke iz tablice za izradu grafičkog prikaza. Samostalno i ispravno objašnjava grafički prikaz.	2	
	Složena gibanja		4	
<b>6. LINEARNA FUNKCIJA U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA U GEOGEBRI</b>	Istraživanja gibanja pod utjecajem stalne sile	Prikazuje podatke dobivene eksperimentom u tablice. Grafički prikazuje ovisnost veličina unesenih u tablicu. Analizira grafičke prikaze. Mijenjajući uvjete eksperimenta predviđa novu situaciju.	2	
	Elastična sila i određivanje konstante elastičnosti opruge		2	
	Period jednostavnog njihala		2	
	Električni otpor		2	
<b>7. VEKTORI U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA U GEOGEBRI</b>	Rastavljanje sile na kosini na njezine komponente	Koristi podatke iz tablice za izradu grafičkog prikaza. Samostalno i ispravno objašnjava grafički prikaz.	2	
	Složena gibanja		4	

## METODIČKE PREPORUKE

Nastavnicima koji će provoditi program fakultativnog predmeta *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* ostavljena je potpuna sloboda pri odabiru broja sati za pojedinu nastavnu temu, a moguće je čak kombinirati sadržaje ovog predmeta sa sadržajima drugih nastavnih predmeta, što će dovesti do boljeg razumijevanja i primjenu naučenog u svakodnevnom životu.

Prilikom obrade i izlaganja nastavnog gradiva učenika se usmjerava na praktičnu i konkretnu primjenu matematičkih, fizičkih i informatičkih znanja. Nastavne cjeline mogu se obrađivati redosljedom koji odgovara nastavniku. Nove sadržaje poželjno je poučavati na način da se učenicima ukratko demonstriraju, a zatim da ih se potiče na samostalno istraživanje. Pokazati im mogućnosti programa GeoGebra i apleta izrađenih u tom programu te im pomagati ako naiđu na poteškoće. Dobro je učenicima pokazati kako da sami uočavaju i ispravljaju pogreške, na taj im način omogućavamo da neuspjeh pretvore u uspjeh, ali i da budu kritični prema svom radu.

Potrebno je rad učenika kontinuirano pratiti i ocjenjivati, ali ih i uključiti u proces ocjenjivanja i vrednovanja, prije svega vlastitog uratka, ali i drugih učenika. Na taj se način potiče razvoj samostalnosti i odgovornosti za svoje postupke i razvija motivacija za daljnji rad.

Za kvalitetno izvođenje nastave, potrebno je jedan dio nastave, koji se odnosi na matematički program GeoGebra provoditi u umreženoj informatičkoj učionici u kojoj je za svakog učenika osigurano računalo s odgovarajućom softverskom podrškom te nastavničko računalo i projektor, dok je jedan dio moguće izvoditi i u klasičnoj učionici.

## PREPORUKE ZA VREDNOVANJE USVOJENOSTI ISHODA

Učenici će zajedno s nastavnikom odraditi svaku temu i to na takav način da aktivno sudjeluju, istražuju i primjenjuju mogućnosti programa GeoGebra.

Pri ocjenjivanju nastavnik može izraditi obrazac za ocjenjivanje u koji će unijeti svoje bilješke i zapažanja.

Bilješke i zapažanja treba temeljiti na: aktivnosti na satu, kvaliteti izlaganja obrade rezultata mjerenja, razumijevanju teme, odgovaranju na pitanja, uspoređivanju vlastitog uratka s drugima, izradi projektnog zadatka, samovrednovanju, interaktivnim kvizovima.

### Elementi vrednovanja

Elementi vrednovanja u fakultativnom predmetu *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* jesu:

1. **Usvojenost znanja** – vrednuje se učenikovo razumijevanje fizičkih, matematičkih i informatičkih koncepata, ali i njihovo povezivanje i primjena u objašnjavanju fizičkih pojava. Tu podrazumijevamo logičko povezivanje i zaključivanje u tumačenju grafičkih prikaza, jednadžbi.
2. **Primjena znanja** – vrednuje se sposobnost učenikove primjene matematičkih i fizičkih koncepata u strategiji rješavanja zadataka.
3. **Istraživanje pojava** – vrednuje se stalnim praćenjem aktivnosti učenika u istraživački usmjerenom učenju i poučavanju. Vrednuju se aktivnost na satu, donošenje zaključaka na temelju obrade i zapisa podataka, doprinos timskom radu. Vrednuje se učenikova kreativnost pri stvaranju i provjeravanju hipoteza.

Elementi 1, 2, 3 vrednuju se ocjenama od 1 do 5. Doprinos svih elemenata u zaključnoj ocjeni u jednakim je postocima.

Učitelj opisno procjenjuje i tri elementa generičkih kompetencija: odgovornost, samostalnost i samoinicijativu te komunikaciju i suradnju.

## Formiranje zaključne ocjene

Pri zaključivanju ocjena svi navedeni elementi vrednovanja promatraju se ravnopravno te jednako utječu na formiranje zaključne ocjene. Zaključna ocjena izražava se brožčanom ocjenom: 1 – nedovoljan, 2 – dovoljan, 3 – dobar, 4 – vrlo dobar, 5 – odličan.

Elementi vrednovanja	Ocjena			
	dovoljan (2)	dobar (3)	vrlo dobar (4)	odličan (5)
<b>Usvojenost znanja</b>	Koristi ranije naučene nastavne sadržaje uz pomoć nastavnika.	Poznaje osnovne pojmove.	Poznaje sve nastavne sadržaje, ali ih ne povezuje sa sličnim sadržajima.	Povezuje usvojeno znanje s drugim sličnim sadržajima.
<b>Primjena znanja</b>	Grafički iskazuje podatke.	Očitava grafičke prikaze.	Povezuje zavisne i nezavisne veličine.	Analizira grafičke prikaze.
<b>Istraživanje pojava</b>	Prepoznaje veličine važne za istraživanje.	Obrađuje rezultate mjerenja.	Uočava povezanost u promjeni fizičkih veličina.	Mijenjajući uvjete eksperimenta, predviđa novu situaciju.

# 1. GEOGEBRA

Prijedlog broja sati: 20

ISHODI:

Na kraju učenja i poučavanja fakultativnog predmeta učenik:

- 1.1. Instalira GeoGebru,
- 1.2. Prilagođava osnovne postavke (boju, veličinu, koordinatnu mrežu, koordinatne osi...),
- 1.3. Crta točke, pravce i vektore direktno i koristeći traku za unos,
- 1.4. Crta graf dane funkcije,
- 1.5. Iščitava sjecišta grafa linearne funkcije s koordinatnim osima,
- 1.6. Iščitava nagib pravca,
- 1.7. Iščitava komponente vektora.

U samom nazivu ovog kurikuluma doznaje se da će se podatci dobiveni eksperimentom obrađivati u programu GeoGebra. Budući da nisu svi učenici koristili GeoGebru u samostalnom radu, a ovisno o nastavniku neki se možda nisu ni susreli s ovim programom, učenike najprije treba upoznati s načinom rada, osnovnim funkcijama GeoGebre, a onda oni mogu samostalno istraživati i otkrivati nove u mnoštvu funkcionalnosti koje ona nudi.

GeoGebra je jedan od najčešćih odabira hrvatskih nastavnika Matematike (sve češće i Fizike) zbog dostupnosti i lakoće korištenja te preglednosti i mogućnosti uređivanja grafova. Instalacija GeoGebre vrlo je jednostavna: preuzimanje instalacijske datoteke sa stranice <https://www.geogebra.org/download>, a dalje je samo potrebno slijediti upute. Učenicima je važno naglasiti da je GeoGebra besplatan alat dostupan svima na službenim stranicama i da nema potrebe istraživati gdje se ona može preuzeti te kako ju instalirati.

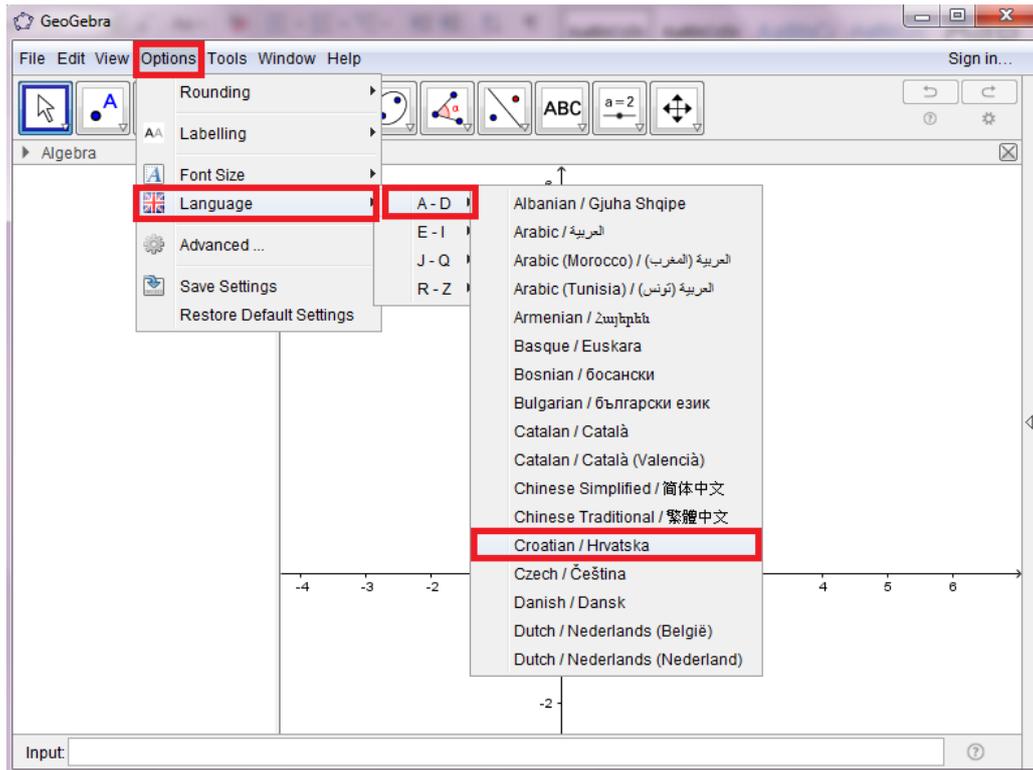
Tijekom sudjelovanja u ovom fakultativnom predmetu učenici će se osposobiti za korištenje GeoGebre na više razina: osnovnoj za ucrtavanje točaka, crtanje grafova funkcija i crtanje grafova iz tablice koja prikazuje podatke dobivene eksperimentom te višoj razini za koju se ne može reći što je granica. Zainteresirani učenik može dostići razinu programiranja u GeoGebri, korištenja složenijih naredbi, istraživanjem može samostalno izrađivati GeoGebra aplete kakve zamisli. Učenici će polako usvajati nova znanja i proširivati vidike što se tiče korištenja matematičkih softvera i njihovih mogućnosti. Učenik bi u ovom fakultativnom predmetu trebao uočiti silne mogućnosti jednog naizgled jednostavnog alata, a spoznajom lakoće obrade podataka smatra se da će se razviti još veći interes za proučavanje dodatnih mogućnosti GeoGebre. Nadamo se da će takva situacija rezultirati i pojačanim interesom za matematiku, fiziku i ostale prirodne znanosti, od kojih učenici ponekad bježe misleći da su teški i da ih je prezahtjevno učiti.

Preporuka je da svaki učenik pri prvom susretu (na prvom nastavnom satu) samostalno instalira GeoGebru na računalo. Zatim bi bilo dobro učenicima dati vremena da istražuju korisničko sučelje GeoGebre, mogućnosti koje ona pruža, a do kojih se dolazi odabirom neke od ponuđenih naredbi u padajućim izbornicima. Očite će naredbe do kojih se lako dolazi učenici lako usvojiti. Veća pomoć bit će im potrebna pri obradi podataka dobivenih eksperimentom i u slučaju da učenici pokažu veliki interes, može im se pokazati kako napraviti dinamičke interaktivne GeoGebra aplete.

## Odabir jezika

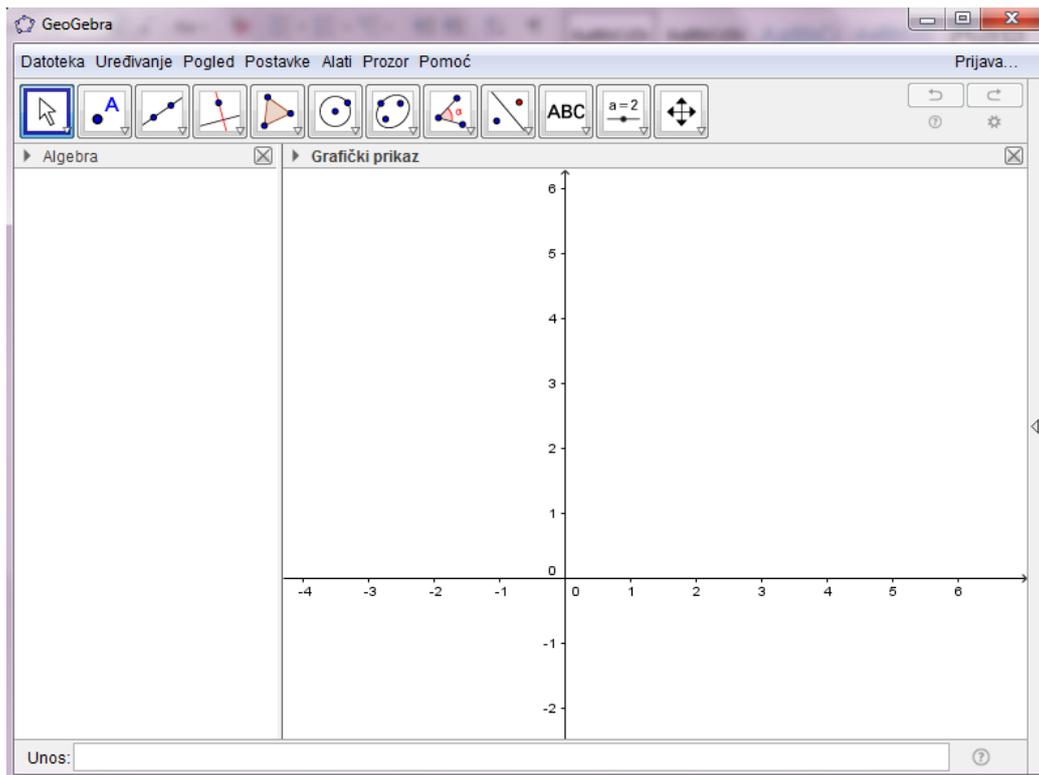
Jezik se u GeoGebri može vrlo jednostavno promijeniti. Učenicima je vjerojatno najjednostavnije raditi u okruženju koje je na hrvatskom jeziku pa se preporuča pokazati im kako se odabire željeni jezik.

Na slici Slika 1.1. prikazano je kako promijeniti jezik. Odabirom naredbe Options otvara se padajući izbornik u kojem je potrebno odabrati opciju Language. Zatim se otvara novi padajući izbornik u kojem su jezici poredani abecednim redom, a do željenog se dolazi odabirom opcije koja ima početno slovo jezika. Tako na primjer za promjenu jezika u hrvatski odabiremo prvu opciju, dakle jezike koju počinju slovima u rasponu A – D, otvara se novi padajući izbornik u kojem odabiremo jezik Croatian/Hrvatska.



Slika 1.1. Odabir jezika u GeoGebri

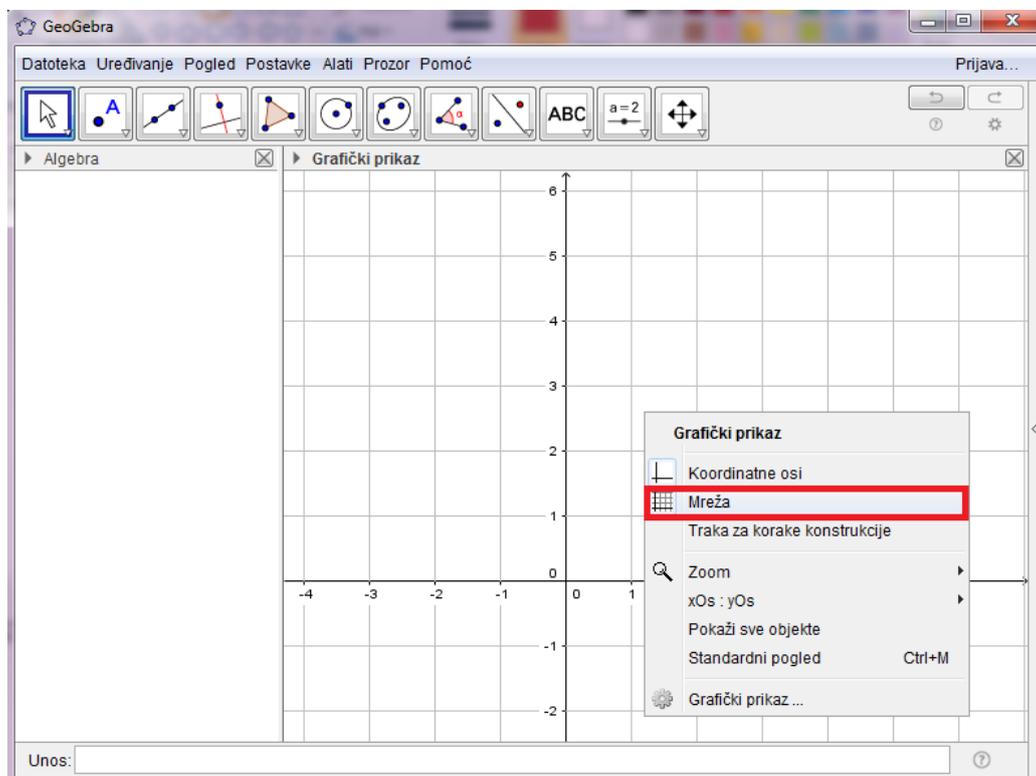
Na slici 1.2. prikazano je korisničko sučelje na hrvatskom jeziku.



Slika 1.2. GeoGebra na hrvatskom jeziku

## Mreža

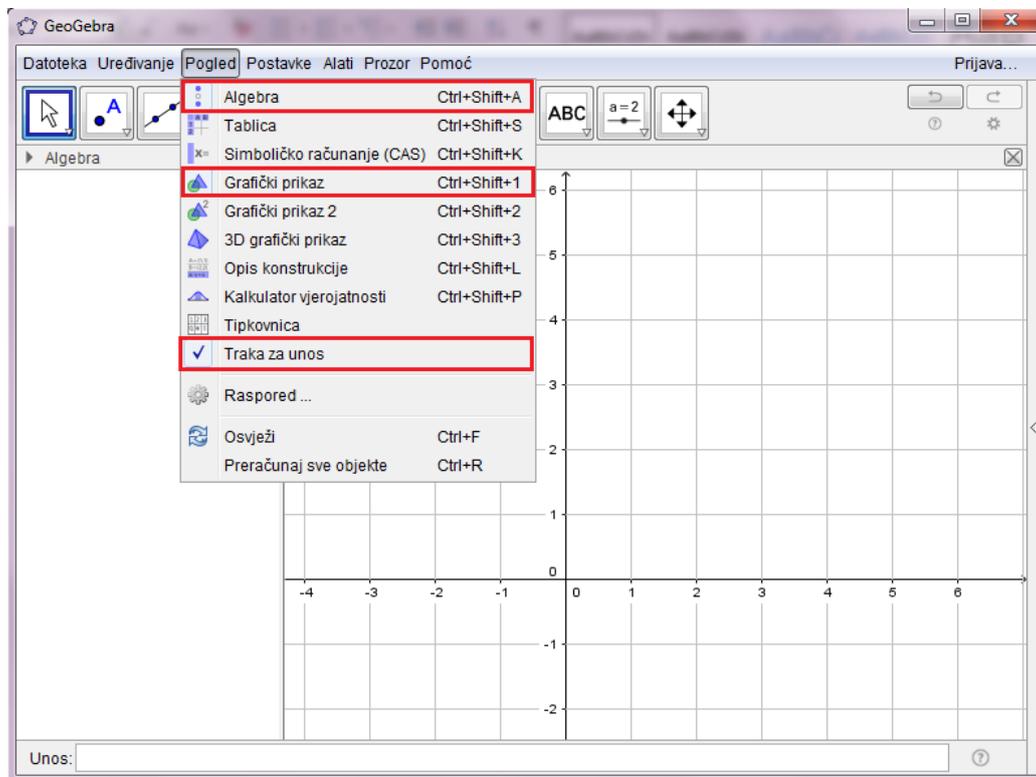
Uključivanje/isključivanje koordinatne mreže najjednostavnije se izvršava desnim klikom u koordinatnom sustavu i odabirom naredbe Mreža. (Slika 1.3.)



Slika 1.3. Koordinatna mreža

Slično odabirom naredbe Koordinatne osi uključuju se/isključuju koordinatne osi.

## Pogled



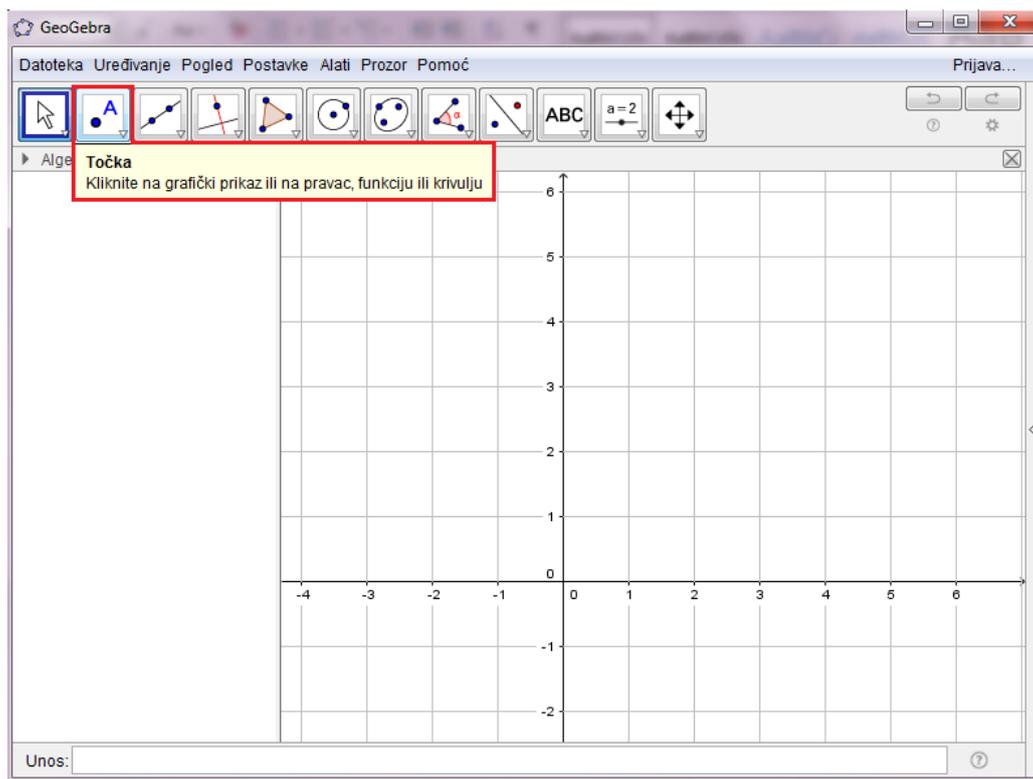
Slika 1.4. Pogled

Otvaranjem GeoGebre automatski su prikazana tri dijela: Algebra (lijevi dio u kojem je popis objekata s kojima radimo), Grafički prikaz (desni dio s koordinatnim sustavom u kojem se prikazuju grafički prikazi objekata s kojima radimo) i Traka za unos (dolje, služi za unos naredbi). (Slika 1.4.)

Odabirom neke od ponuđenih naredbi u padajućem izborniku Pogled otvara se odabrani dio (npr. Tablica za unos podataka u tabličnom prikazu, 3D grafički prikaz otvara koordinatni sustav u tri dimenzije...) Naredba Opis konstrukcije vrlo je korisna jer njome dobivamo sve korake pri konstruiranju objekata, možemo pratiti konstrukciju, a također i pokrenuti animaciju, to jest konstrukciju korak po korak po redoslijedu izvođenja te također prilagođavati brzinu animacije.

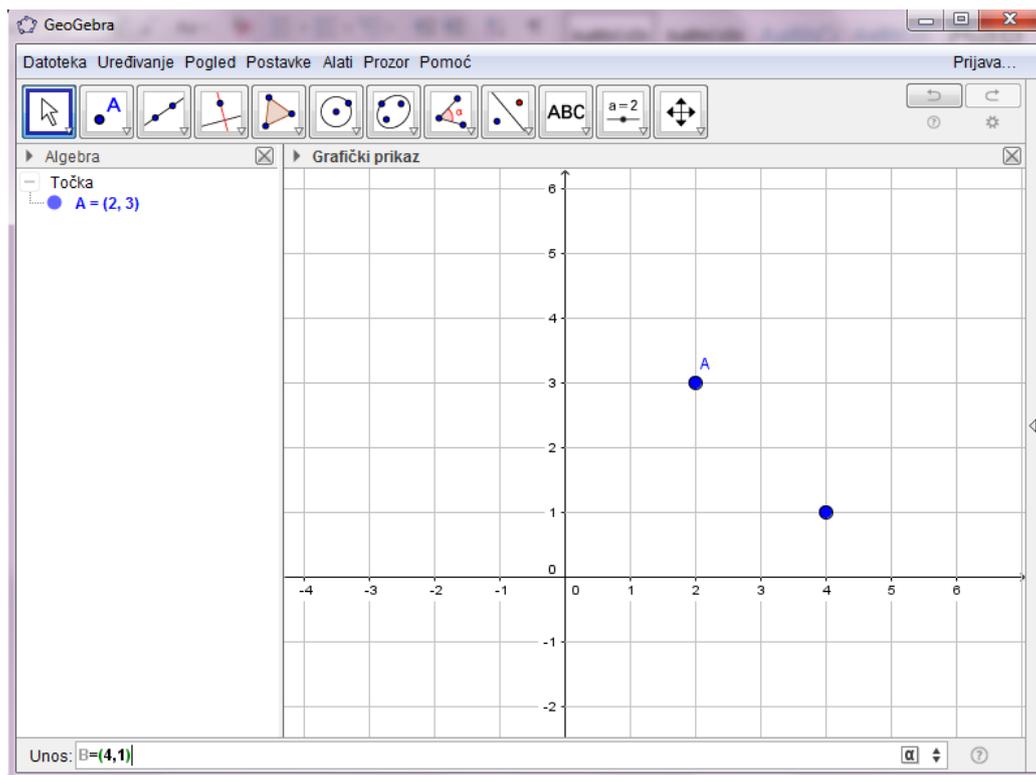
## Točke

Točke je veoma jednostavno grafički prikazati. Zadržavanjem pokazivača miša iznad naredbi prikazanih slikama pokazuje se tekstualni okvir koji objašnjava koja je naredba prikazana slikom i kako ju iskoristiti. (Slika 1.5.)



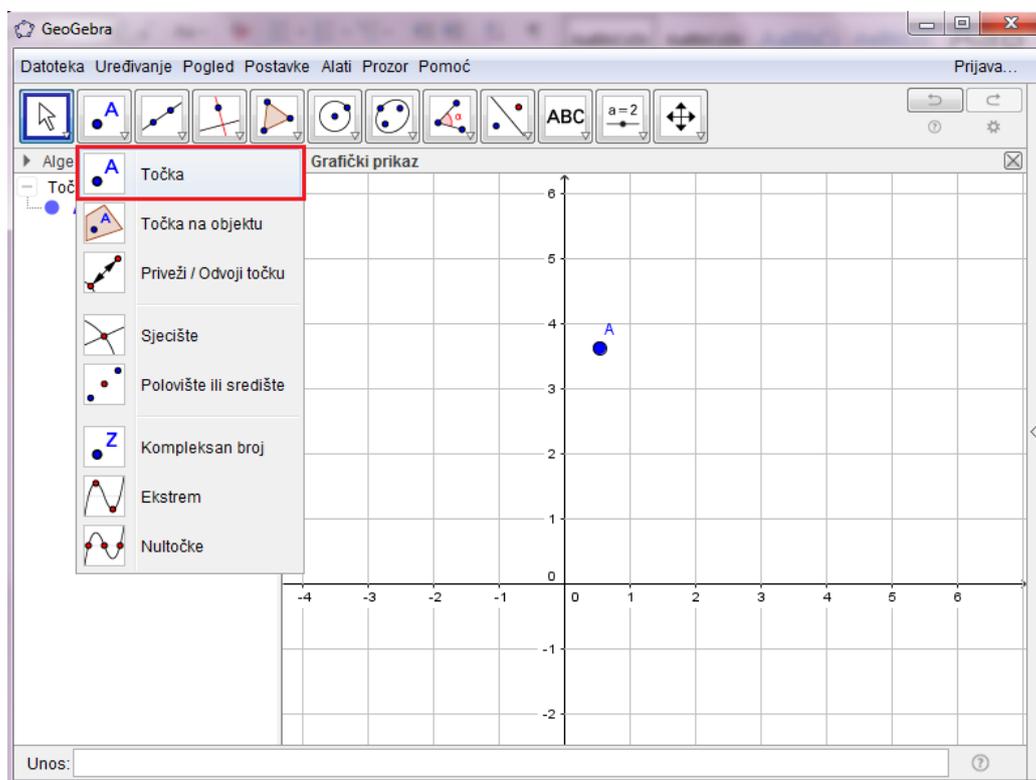
Slika 1.5. Točka – opis naredbe

Pritiskom lijevog gumba miša (odabirom naredbe Točka) i pritiskom bilo gdje u koordinatnom sustavu crta se točka. Točku s određenim koordinatama crtamo tako da miš namjestimo na mjesto u koordinatnoj mreži koje je određeno tim koordinatama. Pri tome treba biti jako precizan i lako je naslutiti da mora postojati način za preciznije crtanje točaka bez namještanja miša po koordinatnom sustavu i pogađanja koordinata. Tome služi traka za unos. U traku za unos upišemo „ime točke = ( $x$  koordinata,  $y$  koordinata)“ na primjer  $A = (2,3)$ . Pritiskanjem tipke Enter na tipkovnici crta se točka u koordinatnom sustavu, a lijevo u dijelu Algebra prikazane su koordinate nacrtane točke. (Slika 1.6.)



Slika 1.6. Crtanje točke

Odabirom strelice dolje desno na naredbi Točka otvara se padajući izbornik s različitim opcijama za crtanje točke. (Slika 1.7.)

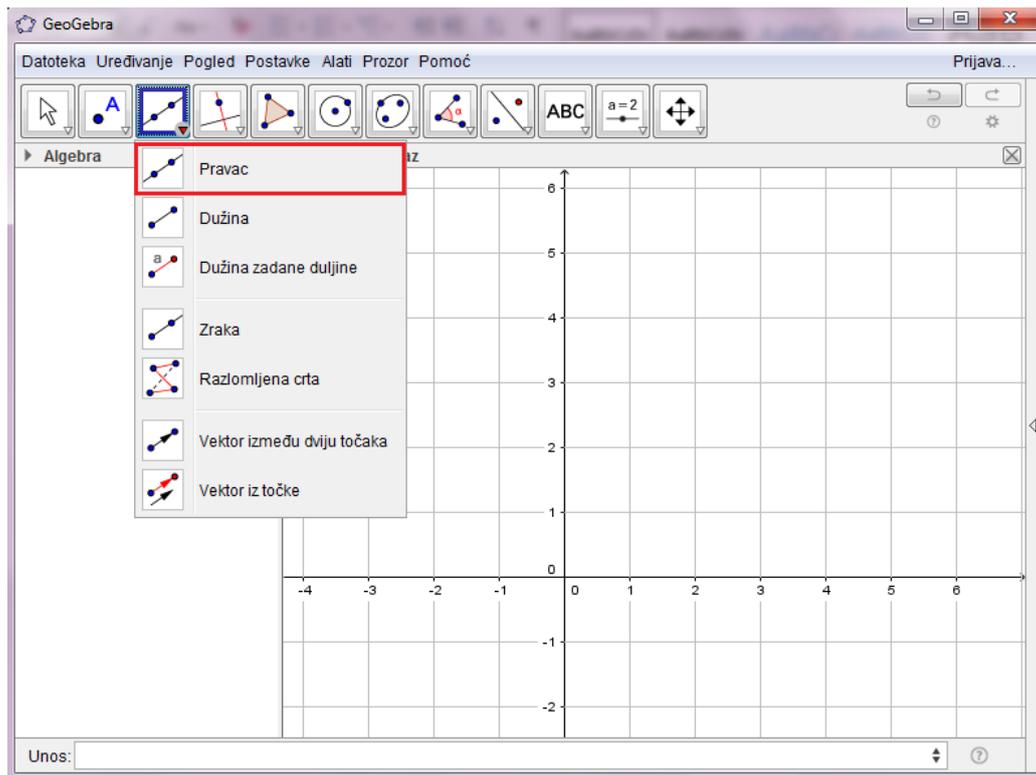


Slika 1.7. Točka

Lako je uočiti da je u GeoGebri veoma jednostavno nacrtati sjecište dvaju objekata ili njihovo polovište/središte. Također se jednostavno određuju nultočke i ekstremi funkcija. Zanimljivo je da odabirom određene naredbe, na primjer Nultočke osim grafičkog prikaza nultočaka, u dijelu Algebra GeoGebra daje koordinate nacrtanih točaka. To je podatak koji treba zapamtiti za kasnije račune koji će se provoditi u ovom fakultativnom predmetu.

## Pravci

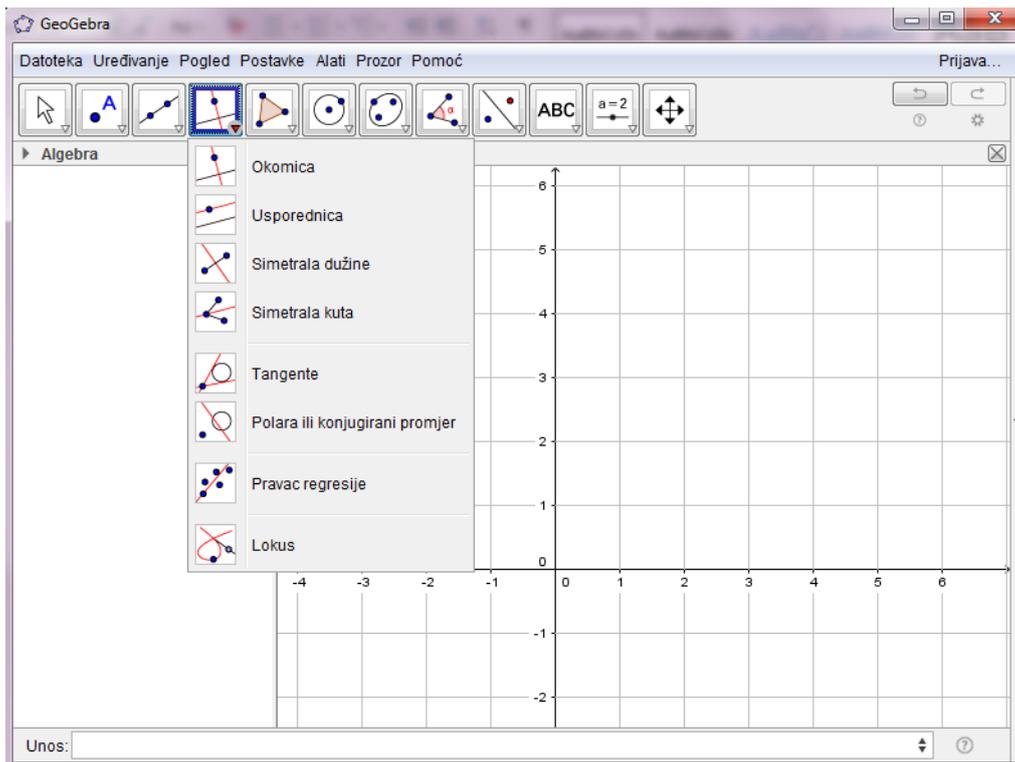
Crtanje pravca jednostavno je kao i crtanje točaka. (Slika 1.8.)



Slika 1.8. Pravac

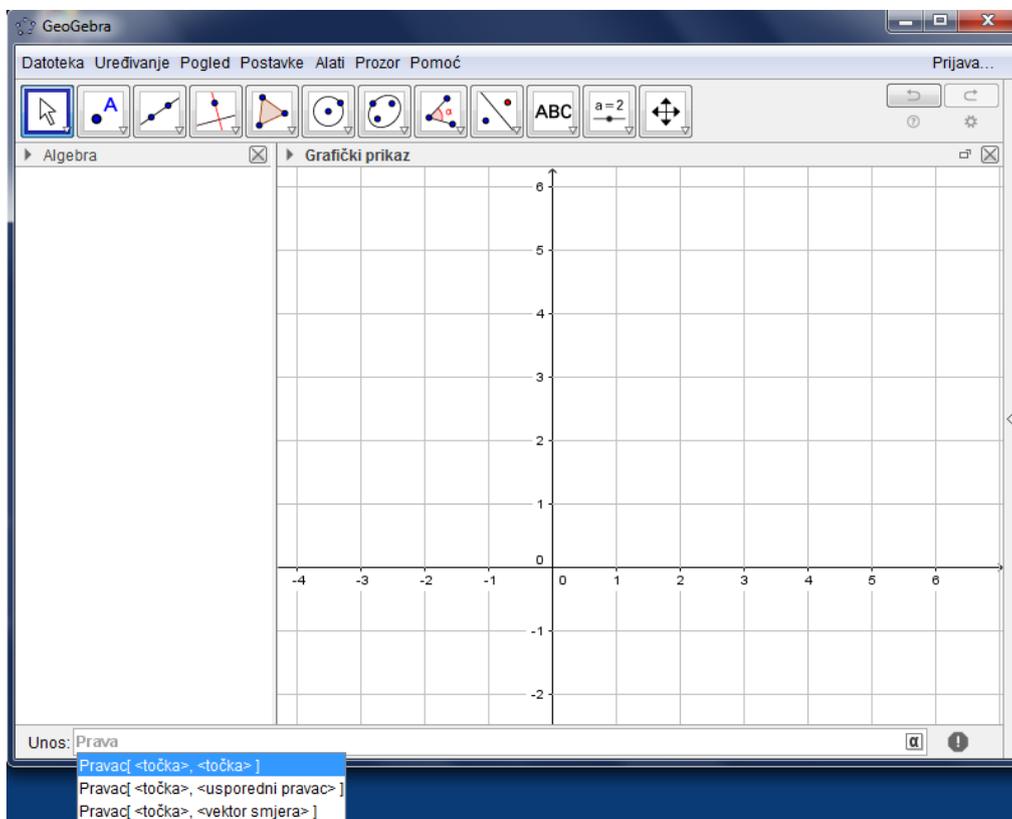
Pravac se može crtati na nekoliko načina, a dva su osnovna: pravac kroz dvije točke i upisivanjem jednadžbe pravca u traku za unos.

U GeoGebri se također veoma jednostavno mogu dobiti okomiti i paralelni pravci, simetrale dužina, kutova, tangente... (Slika 1.9.)



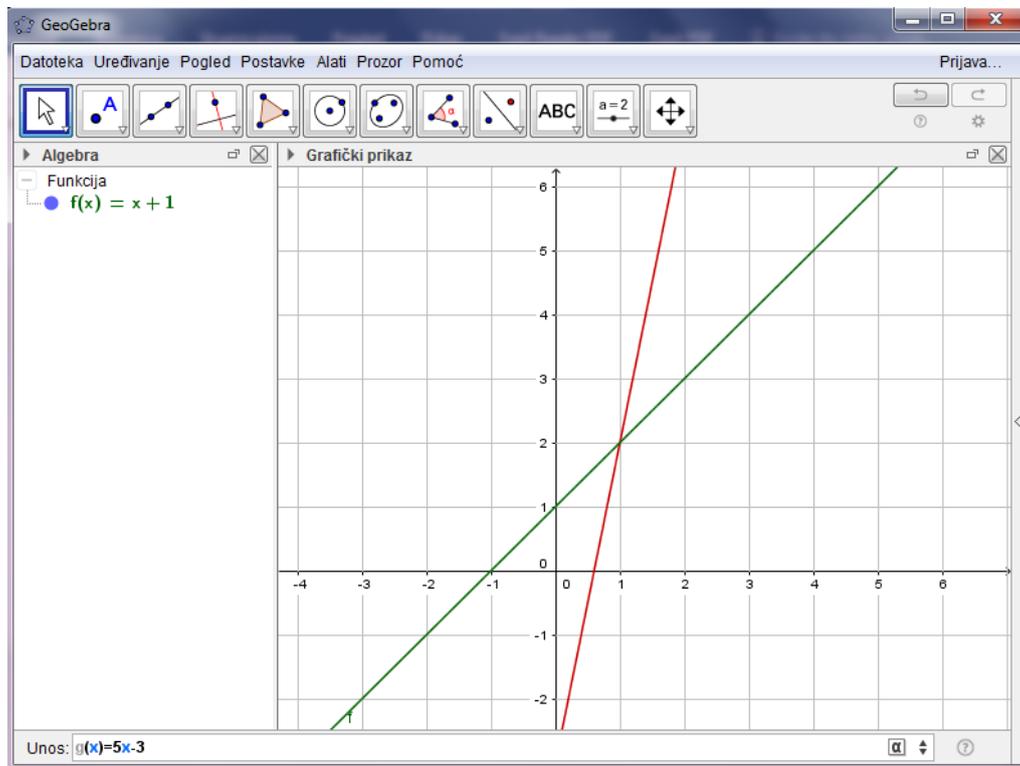
Slika 1.9. Neke mogućnosti GeoGebre

Pravci se mogu crtati s drugim podacima, ne samo kroz dvije točke. Jedan način crtanja pravca jest korištenje trake za unos upisujući riječ Pravac, a zatim odabirući jednu od ponuđenih opcija, ovisno o tome koje podatke želimo koristiti pri crtanju pravca. (Slika 1.10.)



Slika 1.10. Crtanje pravca koristeći traku za unos

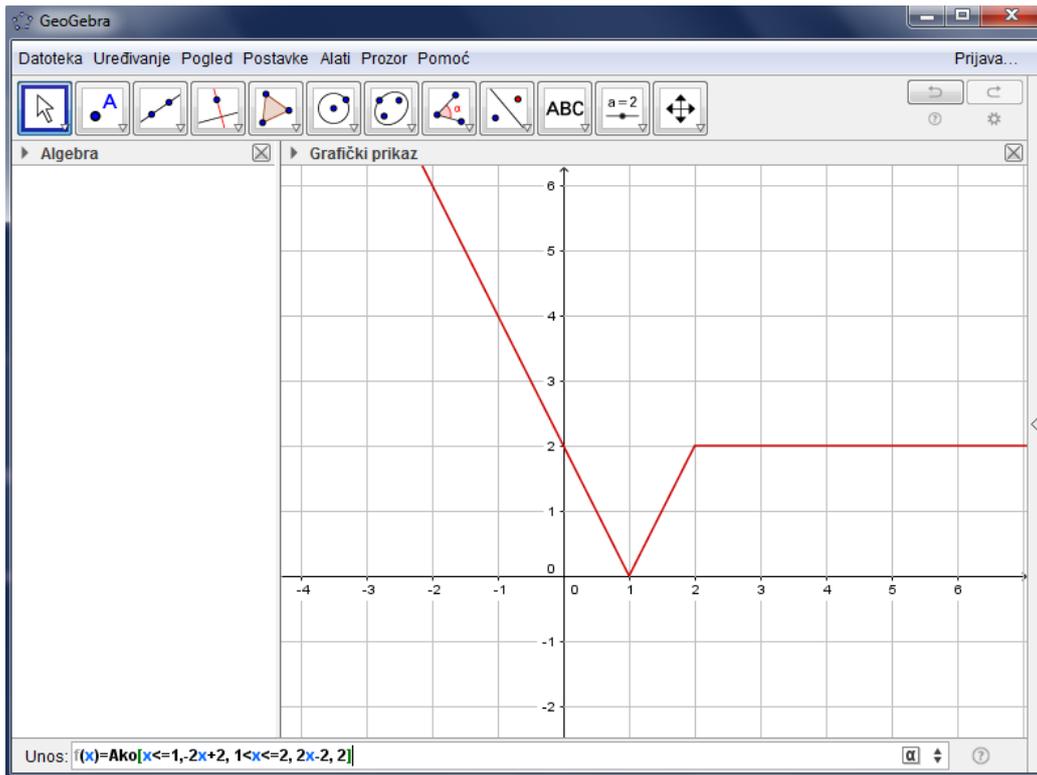
Graf **linearne funkcije** crta se jednostavnim upisivanjem funkcije u traku za unos (Slika 1.11.) ili upisivanjem riječi Funkcija u traku za unos te odabirom jedne od ponuđenih naredbi, ovisno o podacima kojima raspolažemo.



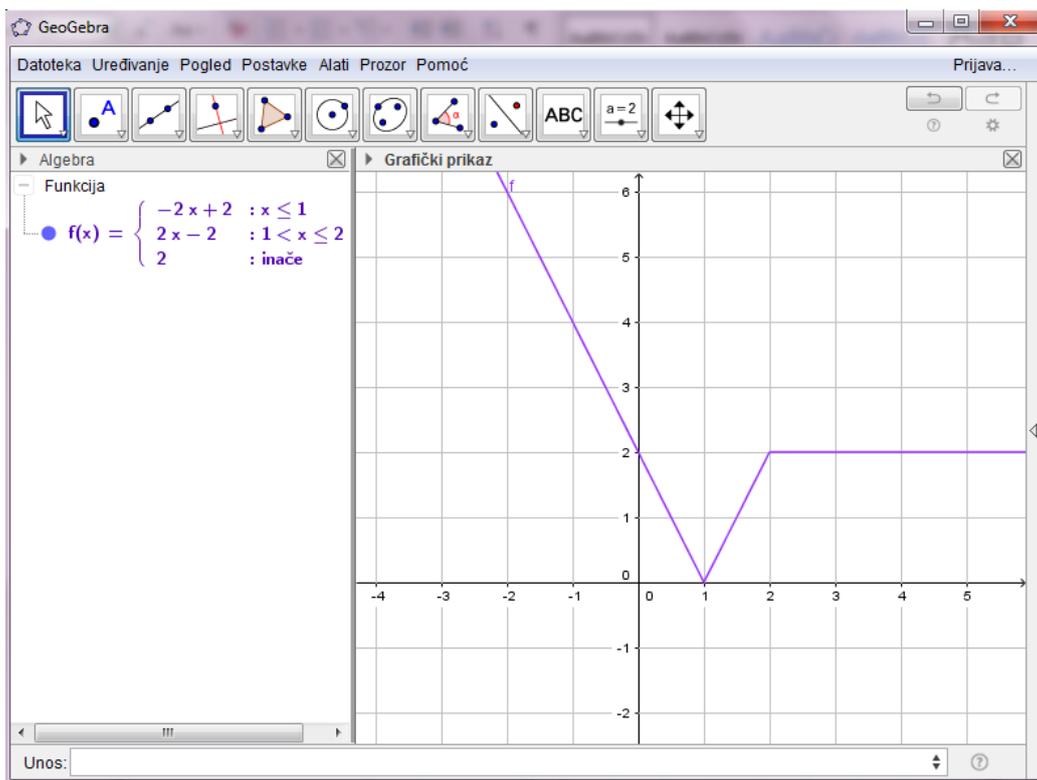
Slika 1.11. Graf linearne funkcije

Graf funkcije zadane po dijelovima dobije se postavljanjem uvjeta pri upisivanju funkcije u traku za unos. (Slika 1.12.)

Pritiskom tipke Enter na tipkovnici graf funkcije je nacrtan, a algebarski zapis funkcije vidi se u dijelu Algebra. (Slika 1.13.)



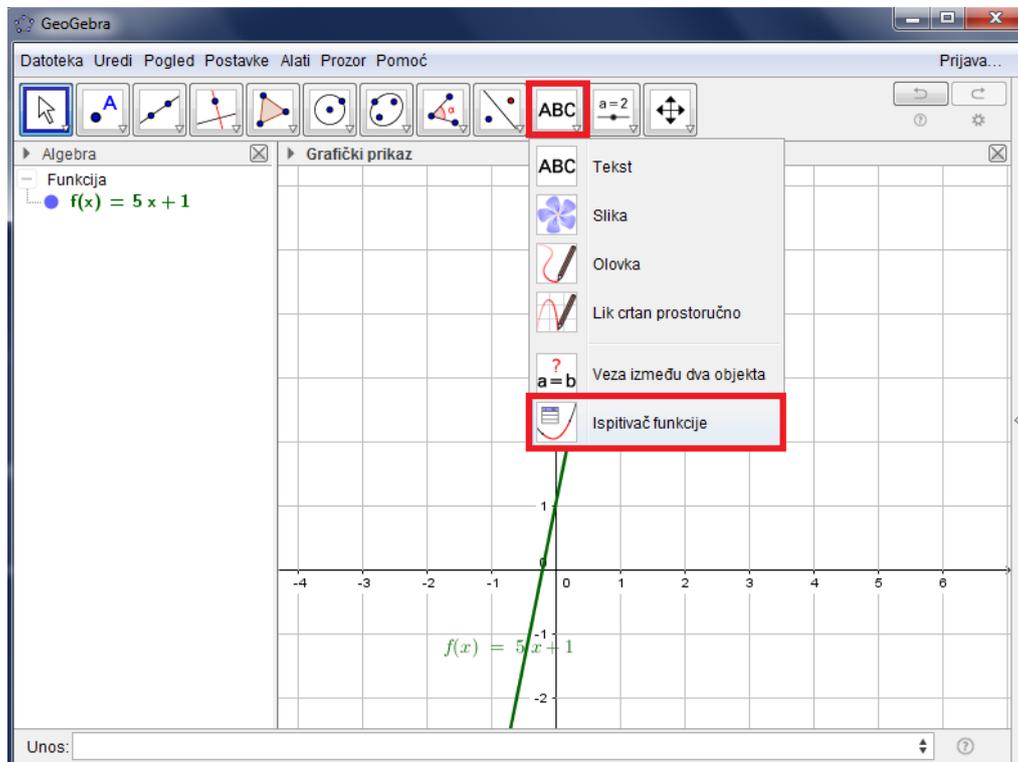
Slika 1.12. Funkcija zadana po dijelovima



Slika 1.13. Funkcija zadana po dijelovima

## Ispitivač funkcije

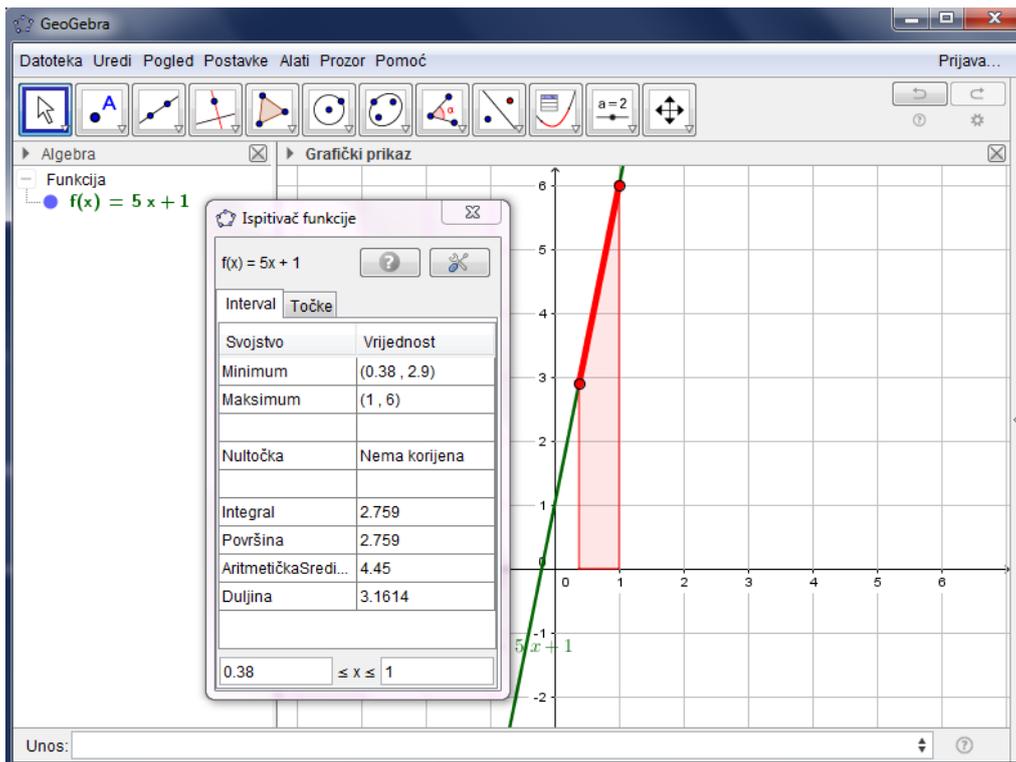
Funkcije treba analizirati. Koristeći GeoGebra alat Ispitivač funkcije vrlo brzo možemo izračunati vrijednost funkcije u točki, odrediti ekstremnu vrijednost na nekom intervalu, odrediti nultočke na nekom intervalu...



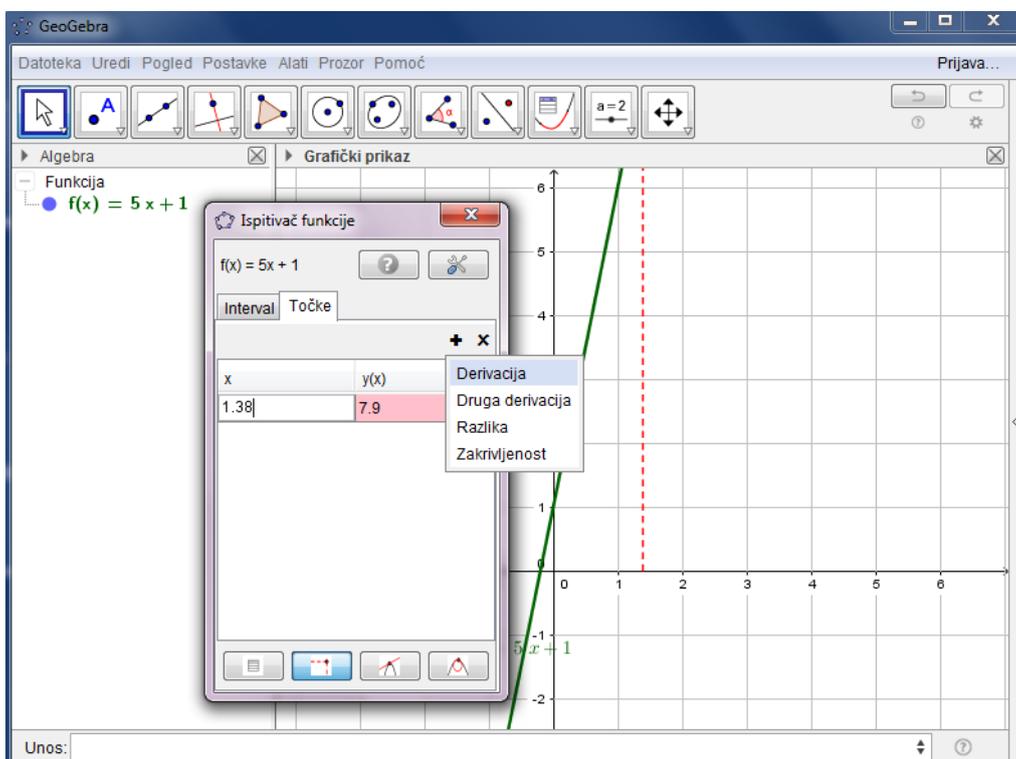
Slika 1.14. Ispitivač funkcije

Nakon odabira Ispitivača funkcije potrebno je odabrati funkciju koju želimo ispitati. Otvara se prozor u kojem je u donjem dijelu zadan interval na kojem se funkcija promatra. Unošenjem drugih vrijednosti moguće je promijeniti taj interval. On je na grafičkom prikazu označen crvenom bojom. (Slika 1.15.)

Postoji još mogućnosti za ispitivanje svojstava funkcije. Neke od njih dobiju se odabirom druge kartice Točke gdje možemo izračunati vrijednost funkcije za bilo koju vrijednost varijable  $x$ . Osim toga moguće je dobiti popis točaka, tangentu, računati derivaciju u točki, drugu derivaciju... (Slika 1.16.)

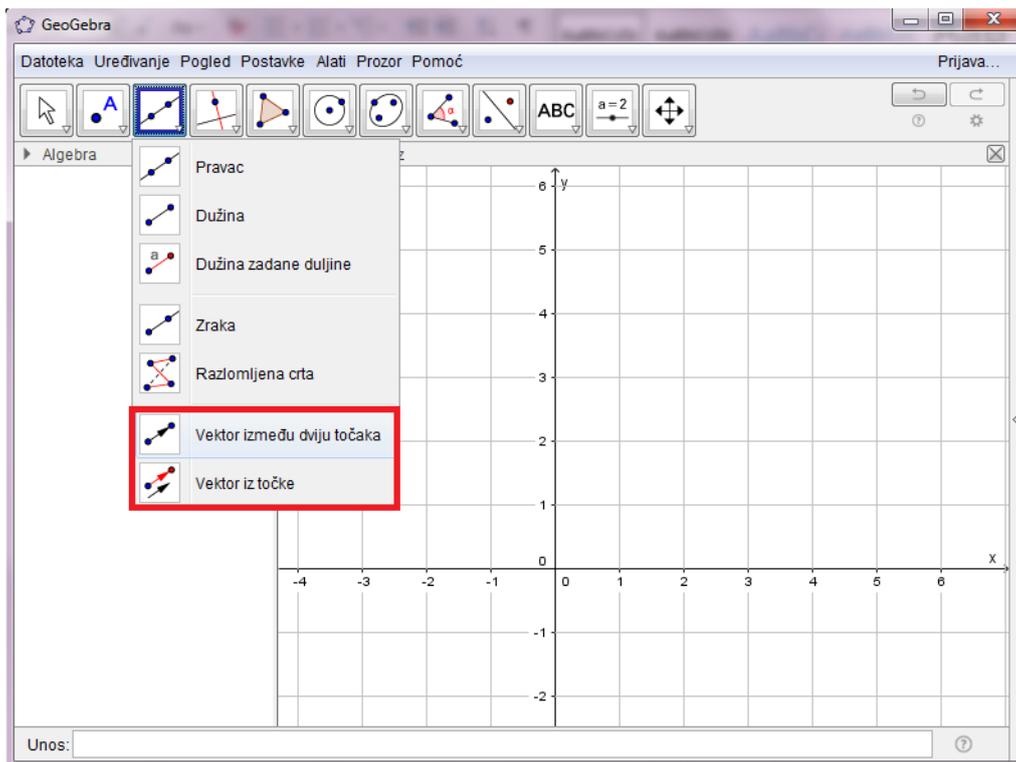


Slika 1.15. Ispitivač funkcije – Interval



Slika 1.16. Ispitivač funkcije – Točke

## Vektori



Slika 1.17. Vektori

Naredbe za crtanje vektora nalaze se u istom padajućem izborniku kao naredba za crtanje pravca. (Slika 1.17.) Odabirući naredbu koja nam odgovara vrlo brzo dobijemo vektor. Drugi je način crtanja vektora koristeći traku za unos tako da se upiše riječ Vektor i odabere naredba koja nam je povoljna ovisno o podacima kojima raspolažemo.

**IDEJA:** Naprednim učenicima može se dati zadatak da istraže preslikavanje translacija za vektor i preslikaju neki objekt. To može biti GeoGebra aplet koji će učenik izložiti pred ostatkom grupe.

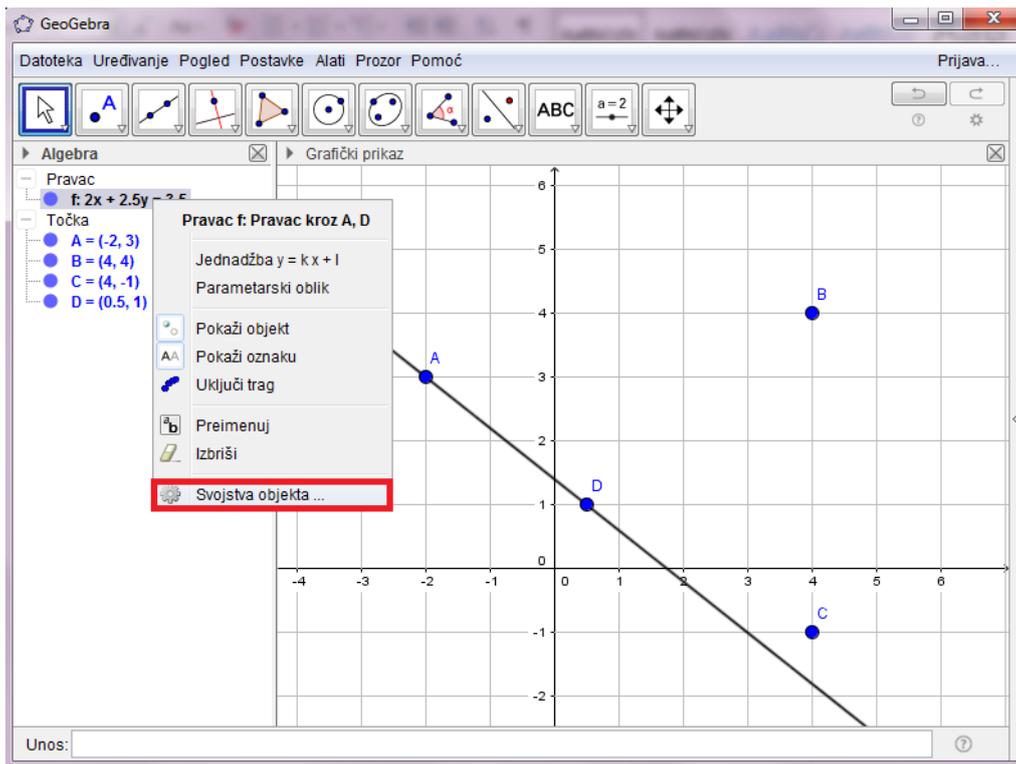
### Stil objekta

Svaki objekt koji grafički prikazujemo ima neki svoj stil: boju, debljinu crte, oblik...

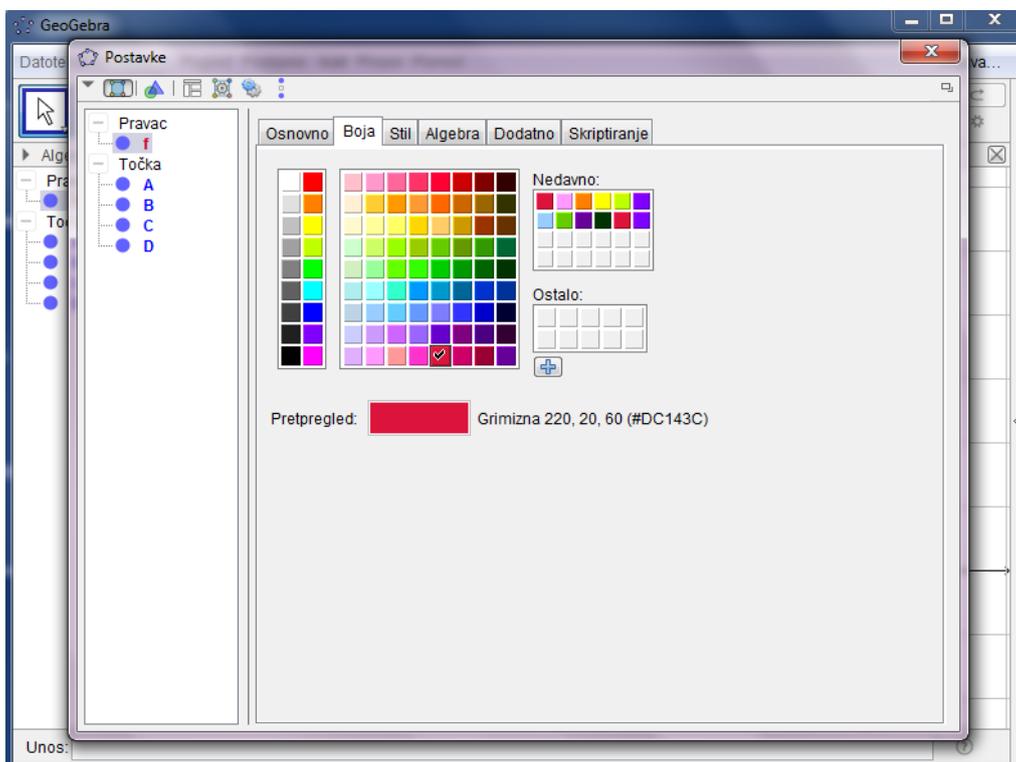
#### Boja

Točke su u GeoGebri inicijalno plave boje, no lako im se promijeni boja. Crtajući pravce svaki bude obojan različitom bojom. GeoGebra ima velik spektar boja i ne postoji razlog da se to ne iskoristi u nastavi pri demonstraciji, no i pri samom učenju. Različito obojani objekti prvenstveno dovode do brzog uočavanja veza među objektima, presjeka i ostalih mogućih situacija koje nas mogu zanimati.

Boja objekta najjednostavnije se promijeni desnim klikom na objekt (u grafičkom prikazu ili u odjeljku Algebra što je sigurnije i preciznije) i odabirom opcije Svojstva objekta. (Slika 1.18. Stil objekta) Otvara se dijaloški okvir Postavke u kojem imamo više opcija za uređivanje objekta, a ako nam je cilj promijeniti boju, odabiremo Boja. (Slika 1.19.) Odabirom željene boje objekt mijenja boju u odabranu. Ukoliko nam nijedna od ponuđenih boja ne odgovara, pritiskom na gumb + otvara se novi dijaloški okvir u kojem možemo „miješati“ crvenu, zelenu i plavu boju (RGB).



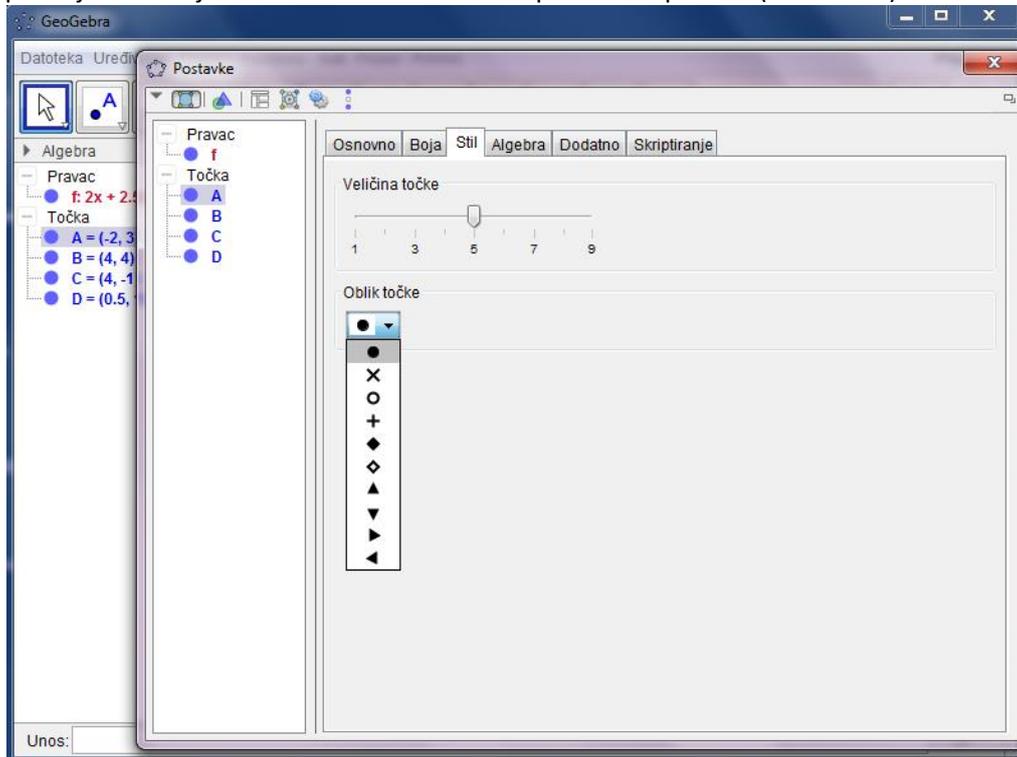
Slika 1.18. Stil objekta



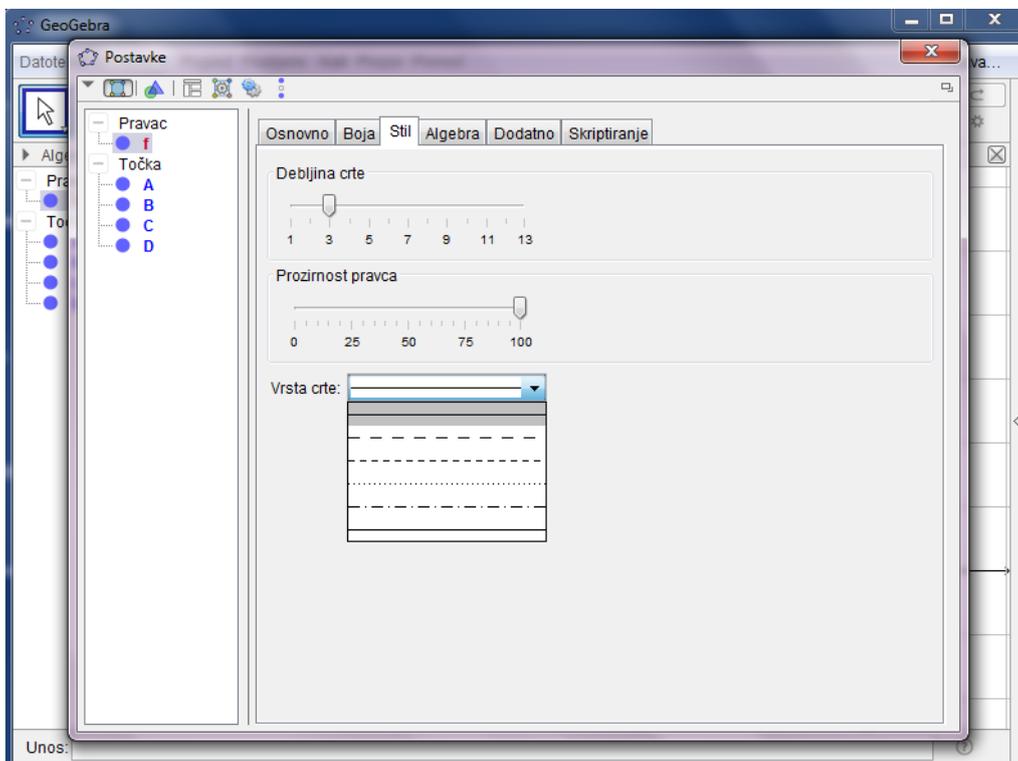
Slika 1.19. Promjena boje

## Veličina

Slično kao boju svakom objektu možemo mijenjati veličinu. Točkama se može promijeniti veličina same točke (oznake kojom je točka prikazana) (Slika 1.20.), pravcima se može promijeniti debljina crte i vrsta same crte te prozirnost pravca. (Slika 1.21.)



Slika 1.20. Stil točke



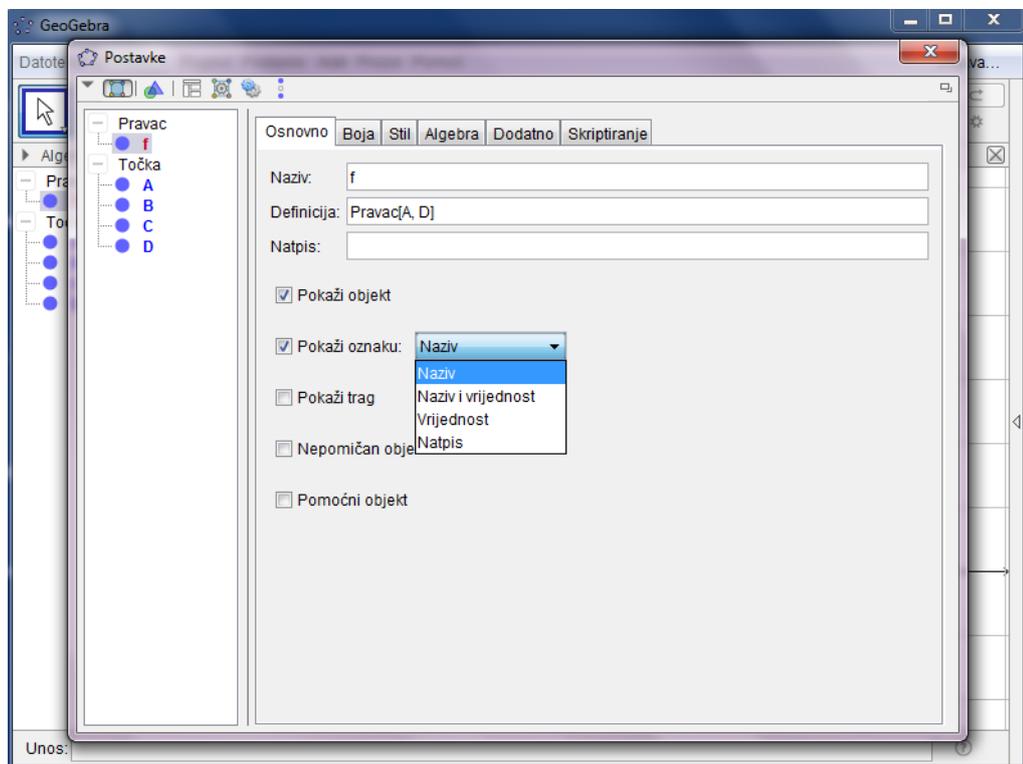
Slika 1.21. Stil pravca

## Oznake

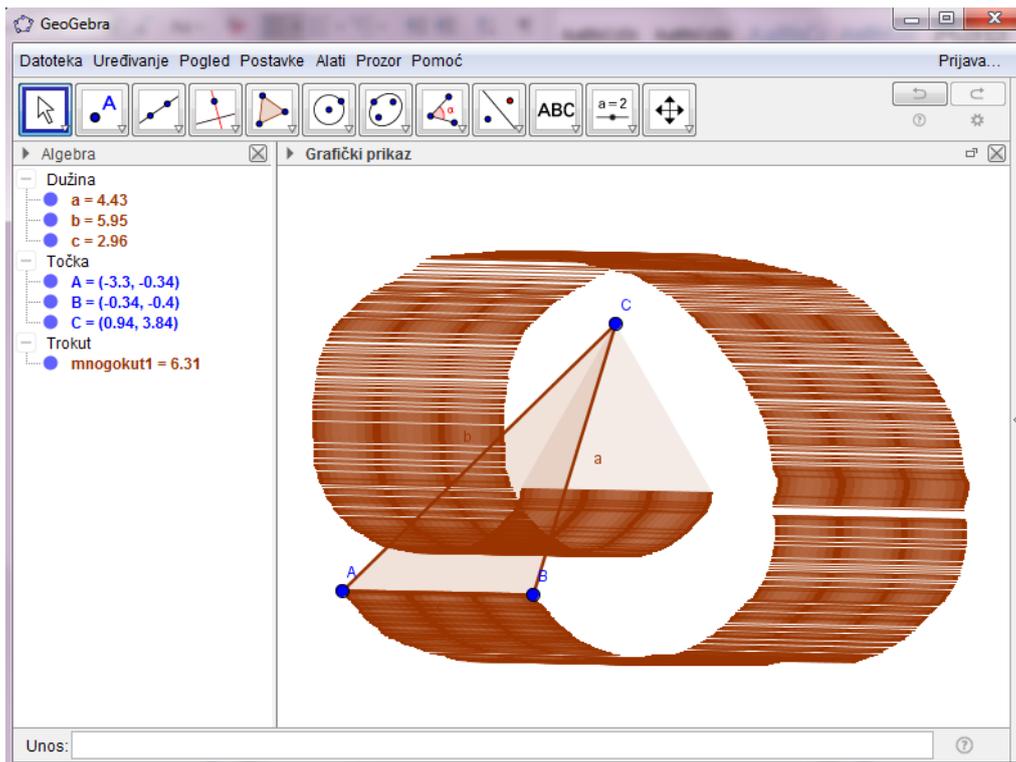
Svaki objekt koji grafički prikazemo može biti prikazan (vidljiv) ili skriven (pomoćni objekt). Vidjeli smo da točkama možemo birati oblik, veličinu i boju oznake, slično kao kod pravca, no osim toga važno je znati da svakom objektu možemo dodijeliti ime koje nama odgovara. Program sam svakom novom objektu dodijeli neko ime. Promjena naziva vrši se djelomično istim postupkom kao promjena stila oznake: desni klik na objekt, u padajućem izborniku izabrati Svojstva objekta, zatim u dijaloškom okviru Postavke odabrati karticu Osnovno i u tekstualni okvir Naziv upisati naziv objekta. (Slika 1.22.)

U ovom dijelu biramo još neke opcije:

- Pokaži objekt: potvrdni okvir kojim odabiremo vidljivost samog objekta (pravca, točke...),
- Pokaži oznaku: potvrdni okvir kojim odabiremo vidljivost oznake objekta (objekt može biti prikazan bez oznake, na primjer pravac bez naziva); desno odabiremo što će biti oznaka objekta (vrijednost označava koordinate točke za točku, jednadžbu pravca za pravac...) (Slika 1.22.),
- Pokaži trag: potvrdni okvir kojim odabiremo vidljivost objekta i kada ga sakrijemo; korisna opcija pri konstrukcijama ili kada se želi prikazati nastanak nekog grafa... (Slika 1.23.),
- Nepomičan objekt: kao što sam naziv kaže objekt postaje nepomičan, ne možemo ga micati po koordinatnom sustavu,
- Pomoćni objekt: ne bude prikazan u odjeljku Algebra, grafički je prikaz vidljiv; koristan pri konstrukcijama.



Slika 1.22. Označavanje objekta (pravac)



Slika 1.23. Uključen trag

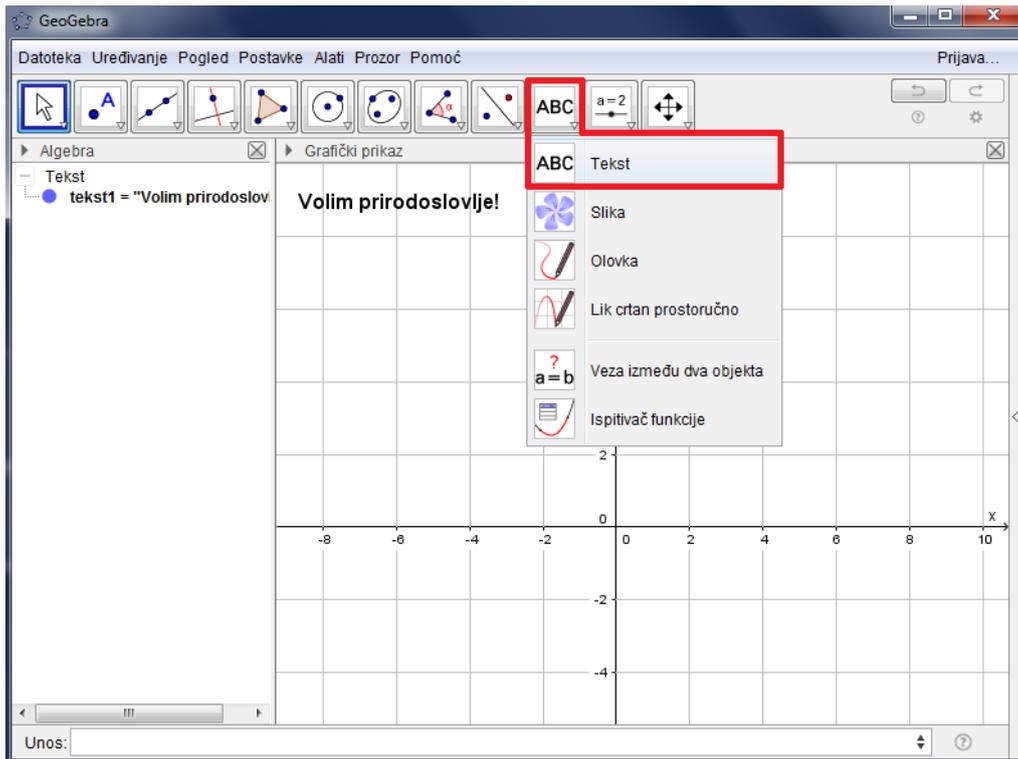
Na slici 1.23. uključen je trag za stranicu  $c$  trokuta  $ABC$ . Mišem povlačimo stranicu  $c$  i dobijemo ovakav oblik. U sredini se vidi kako je trokut izvorno izgledao, tu je ostao njegov trag. Ovo je samo jedan primjer korištenja traga. Učenici koje zanima mogu proučiti dodatnu literaturu, napraviti neki poseban oblik koristeći trag...

### Umetanje teksta

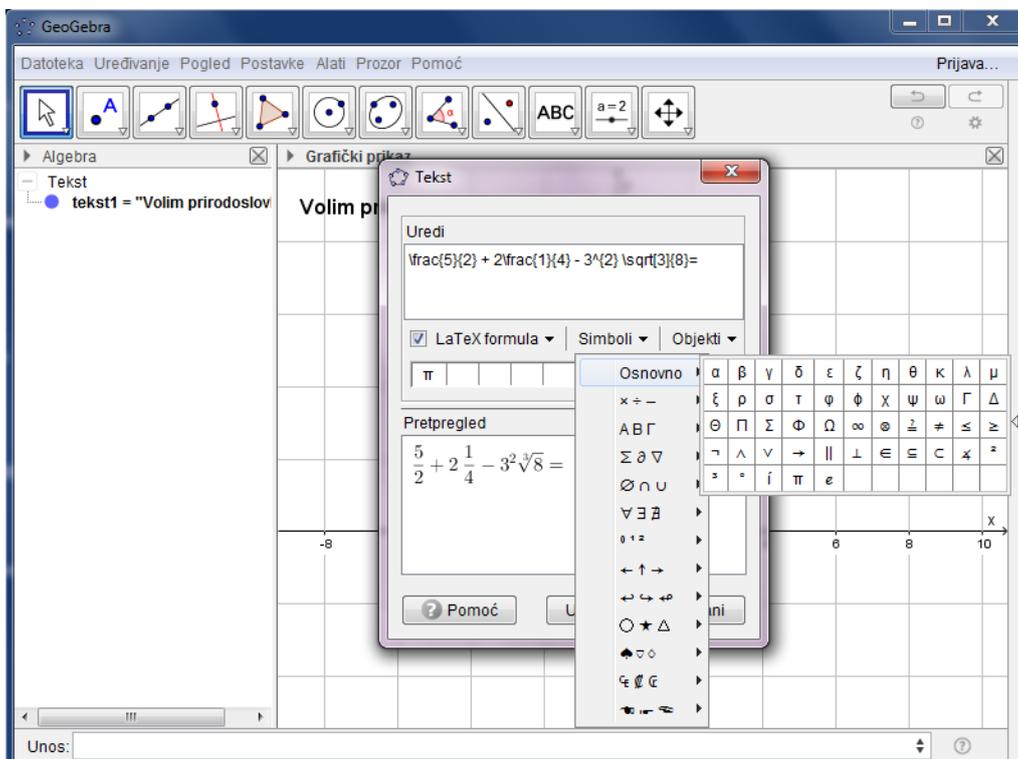
Svaki objekt koji grafički prikazujemo ima inicijalni naziv koji mu dodijeli sam program, no nekad imamo potrebu dodati još nekakav tekst u koordinatnom sustavu, na primjer: tekst zadatka, naslov, uputu...

Na slici 1.24. crvenim je označeno umetanje teksta. Nakon odabira opcije Tekst i mjesta gdje će se tekst nalaziti (lijevim klikom miša) otvara se dijaloški okvir u kojem upisujemo tekst koji želimo prikazati. Osim samog teksta vidimo da možemo pisati i formule koristeći LaTeX sintaksu (odabirom opcije LaTeX formula). Za očekivati je da učenici ne znaju sintaksu LaTeX-a, no to ne treba obeshrabriti ni učenike ni nastavnike jer odabirom strelice desno kod opcije LaTeX formula otvara se padajući izbornik s formulama podijeljenim u neke smislene cjeline. Korisnik odabire formulu koja mu je potrebna i mijenja parametre te umeće formulu. Osim toga desno su različiti simboli koji se često koriste u matematičkim zapisima, a također je moguće unutar teksta umetnuti objekt koji je već kreiran te se tako pozivati na postojeće objekte pri rješavanju nekog problema. (Slika 1.25.)

Danas se većina matematičkih udžbenika, priručnika, časopisa piše u LaTeX-u, također se i web aplikacije okreću tome, stoga smatramo da će i učenicima biti korisno da vide kako izgleda LaTeX sintaksa. Ne preporučujemo zahtijevati od učenika učenje sintakse napamet; smatramo da je važno snalaženje u alatu i to da učenici vide kako nastaju matematičke formule ugodne oku. To bi moglo pobuditi interes za pisanje različitih matematičkih formula jer je to znanje koje učenici nisu izgrađivali do sada, a ne bi im trebalo biti komplicirano.



Slika 1.24. Umetanje teksta



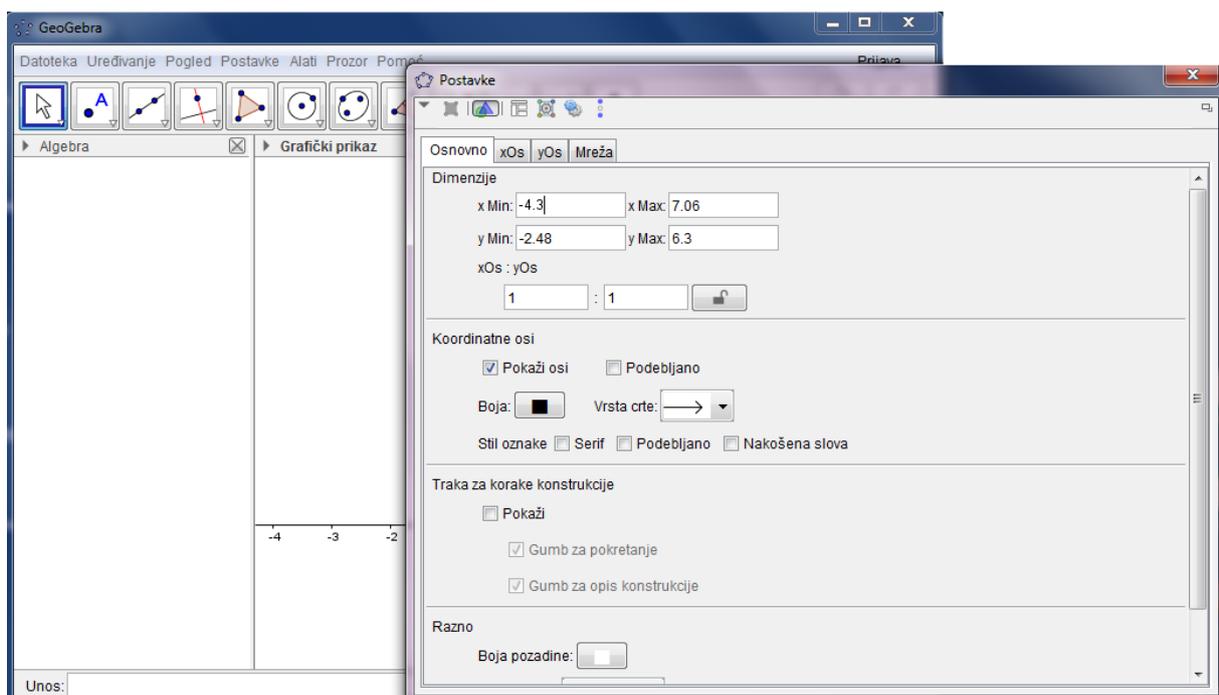
Slika 1.25. Umetanje LaTeX formule

Iz primjera je vidljivo da se napisani tekst također prikazuje lijevo u dijelu Algebra što znači da je i tekst nekakav objekt koji možemo uređivati. Kao i sve ostalo desnim klikom miša otvaramo Svojstva objekta i tamo uredimo veličinu, boju i ostala svojstva teksta kako želimo. Na taj način također mijenjamo tekst.

## Koordinatni sustav

Osim uređivanja nacrtanih objekata možemo prilagoditi koordinatni sustav potrebama zadatka. Kad se pokrene GeoGebra, koordinatne osi nisu označene. Desnim klikom miša u koordinatnom sustavu otvara se padajući izbornik u kojem treba odabrati opciju Grafički prikaz. Otvara se dijaloški okvir Postavke u kojem možemo urediti koordinatni sustav. (Slika 1.26.) Posebno se uređuju osi, njihova boja, debljina, stil. Za označavanje koordinatnih osi odabiremo karticu xOs ili yOs, ovisno koju os želimo označiti. U ovom dijelu možemo odabrati prikaz samo pozitivnog smjera jedne ili obje osi, maksimalnu/minimalnu vrijednost na obje osi, boju pozadine, prilagodbu mreže...

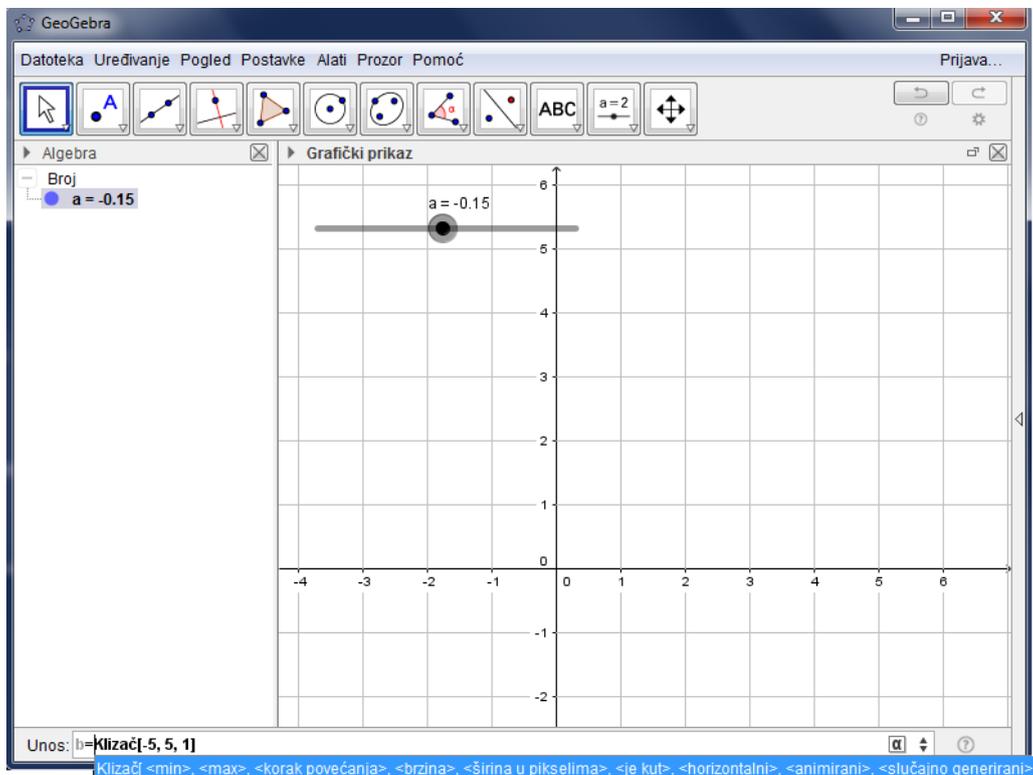
Preporuka je pokazati učenicima kako doći do ovog dijela, a zatim oni sami mogu istražiti sve mogućnosti i prilagodbe koje postoje. Rješavajući zadatke u matematičkom dijelu ovog fakultativnog predmeta, a naročito kod obrade podataka dobivenih eksperimentom, učenici će koristiti mnoge od ovih opcija, zato nije nužno dugo se zadržavati na ovom dijelu pri samom upoznavanju GeoGebre.



Slika 1.26. Prilagodba koordinatnog sustava

## Klizači

Nakon što učenici vide neke osnovne mogućnosti GeoGebre, mogu prijeći na višu razinu. Može im se pokazati jedan primjer GeoGebra apleta u kojem se koriste klizači pa onda zajednički napraviti jedan jednostavan primjer. Za početak to može biti jedna točka kojoj je  $x$  koordinata zadana klizačem, a  $y$  je 0.



Slika 1.27. Klizači

Na slici 1.27. prikazan je jedan umetnut klizač i drugi u tijeku umetanja. Prvi klizač  $a$  umetnut je jednostavnim načinom: upisom  $a = -0.15$  u traku za unos i pritiskom tipke Enter na tipkovnici. Pomicanjem kruga na klizaču mijenja se njegova vrijednost. Klizač je inicijalno racionalan broj između  $-5$  i  $5$ . U traci za unos vidi se drugi način definiranja klizača: upisivanjem  $b = \text{Klizač}[-5, 5, 1]$  pri čemu je  $b$  naziv klizača, a ostalo je definirano u naredbi Klizač. Zaključujemo da će klizač  $b$  biti cijeli broj (jer je korak povećanja jednak 1) iz intervala  $[-5, 5]$ .

Desnim klikom na klizač bilo u dijelu Algebra ili na sam klizač u koordinatnom sustavu otvara se padajući izbornik u kojem prilagođavamo klizač. Slično kao kod svih objekata klizaču možemo mijenjati boju, naziv, oznaku, no također i maksimalnu i minimalnu vrijednost te korak povećanja.

**Primjer:** Nacrtaj točku  $A(a, 0)$  pri čemu je  $a \in [-10, 10]$ . Koristi klizač.

Postupak je sljedeći:

1. Definiramo klizač  $a$ . Najbrže je u jednom koraku preko trake za unos upisati:

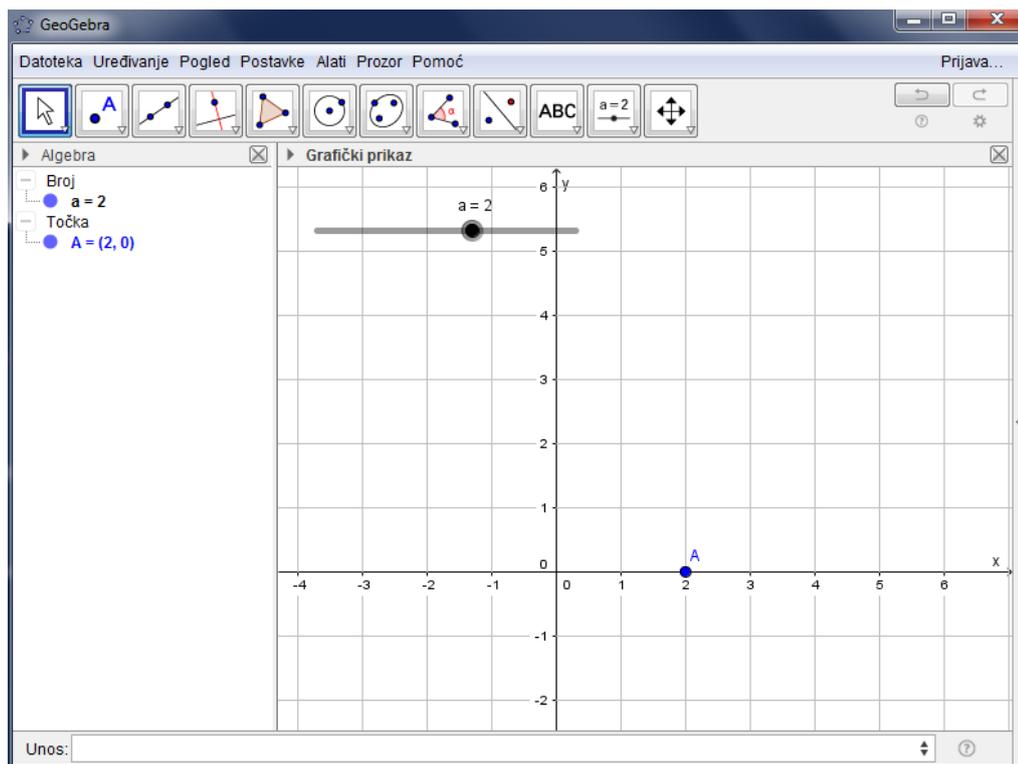
$$a = \text{Klizač}[-10, 10].$$

2. Definiramo točku  $A$ . Upišemo u traku za unos:

$$A = (a, 0).$$

Mijenjajući vrijednost klizača  $a$  točka  $A$  pomiče se po  $x$  osi. (Slika 1.28.)

**PREPORUKA:** Zadati učenicima zadatak crtanja točke kojoj su obje koordinate zadane preko klizača.



Slika 1.28. Koordinata točke zadana preko klizača

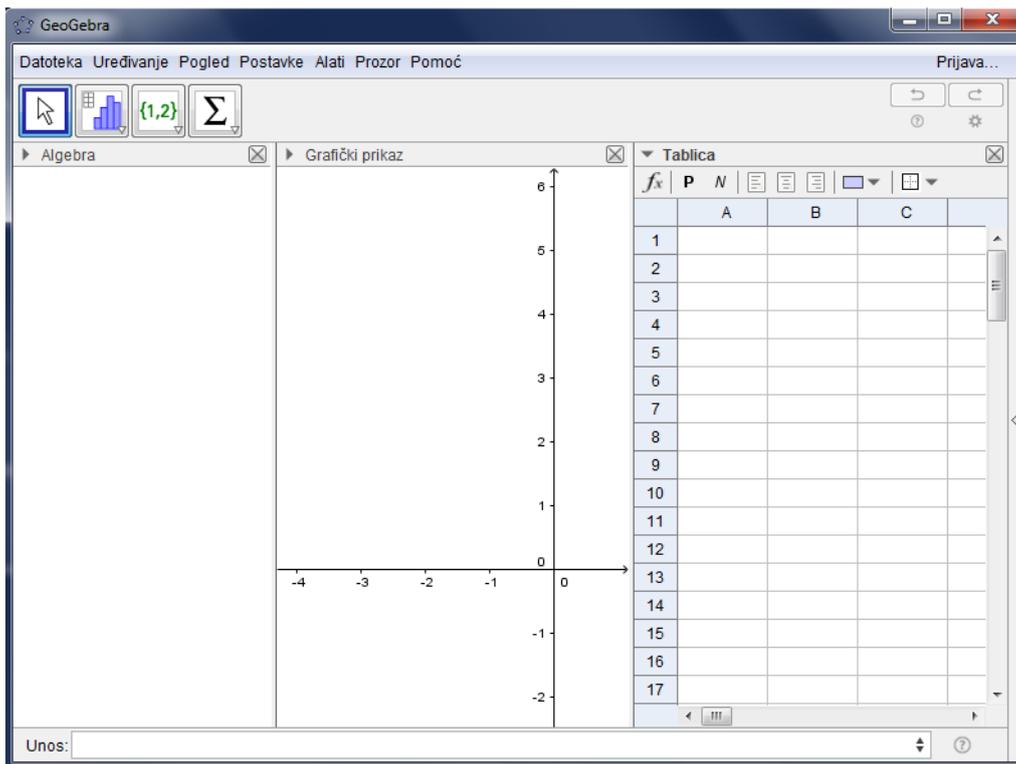
Na ovakav način mogu se crtati pravci, kružnice, mnogokuti...

Veoma je korisno imati GeoGebra aplete koji su dinamički, a to se postiže jednim dijelom klizačima. Učenici mogu mijenjati vrijednost varijabli na vrlo jednostavan način i tako uočavati promjene koje se događaju na grafovima, a iz toga će uslijediti razumijevanje mnogih svojstava grafova funkcija i funkcija samih.

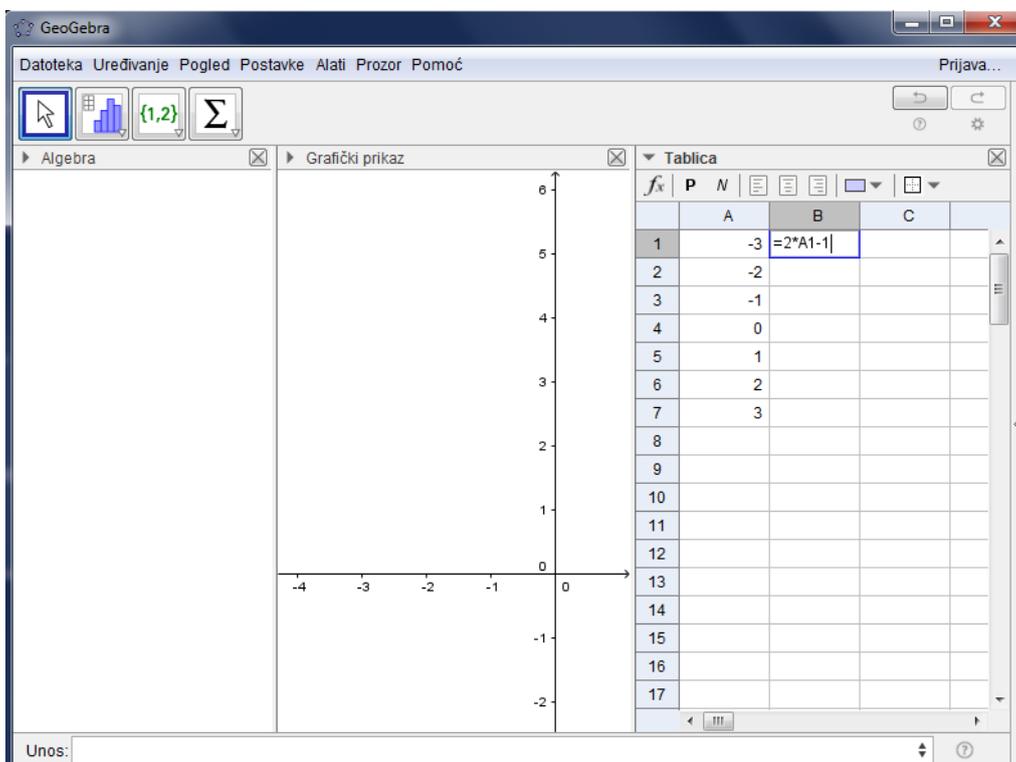
### Tablica

Budući da će tijekom pohađanja ovog fakultativnog predmeta učenici obrađivati podatke dobivene eksperimentom, trebat će im jedan poseban dio GeoGebre Tablica. Logično je da se podatci dobiveni eksperimentom zapisuju u tablicu i tako je uobičajeno. Većina učenika naviknuta je na crtanje grafova koji su rezultat obrade podataka dobivenih eksperimentom u bilježnice ili na milimetarskom papiru, a nekolicina njih koji to možda rade računalno uglavnom koristi Microsoft Excel. Sada će učenici naučiti obrađivati podatke u GeoGebri, crtati grafove iz tablica i dobivati podatke koji su im potrebni vrlo brzo. Dio Tablica pokreće se slično kao Algebra: otvaranjem izbornika Pogled i odabirom opcije Tablica. Taj dio otvara se s desne strane. (Slika 1.29.)

Za početak se preporučuje pokazati ukratko osnovne mogućnosti tablice da se učenici upoznaju s time, a kasnije će proučavati ostale mogućnosti, crtati grafove i analizirati podatke. Pokazat ćemo na primjeru formule  $B = 2A - 1$ . Treba naglasiti da ne treba svaku vrijednost računati, već se može napisati formula za prvu zadanu vrijednost i povlačenjem dolje, formula se kopira za ostale retke. (Slika 1.30.)



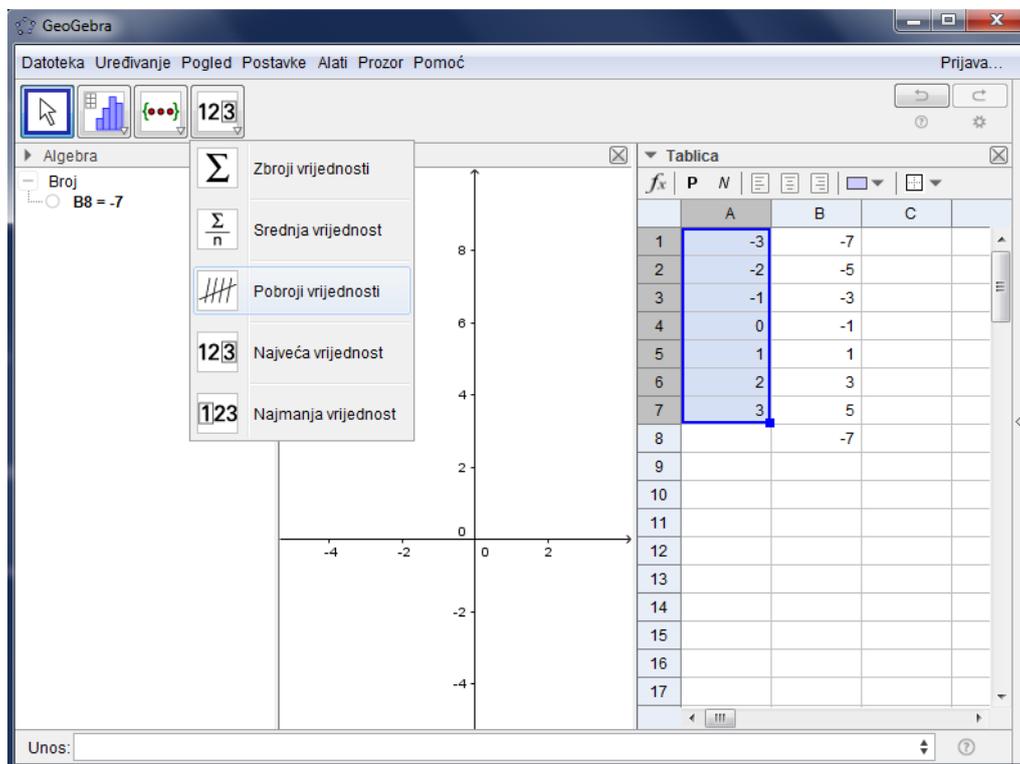
Slika 1.29. Tablica



Slika 1.30. Tablica

Više je mogućnosti za analizu podataka. Za početak podatke s kojima trenutno radimo treba označiti, a zatim birati opciju koja nam je potrebna. Na slici 1.31. prikazane su neke osnovne naredbe koje

možemo provesti za obradu podataka, na primjer: prebrojiti ih, zbrojiti ih, odrediti najveću/najmanju vrijednost, srednju vrijednost. Rezultat operacije prikaže se u tablici ispod podataka koji su obrađivani (ćelija B8), a također je prikazan kao objekt u dijelu Algebra.



Slika 1.31. Obrada podataka u tablici

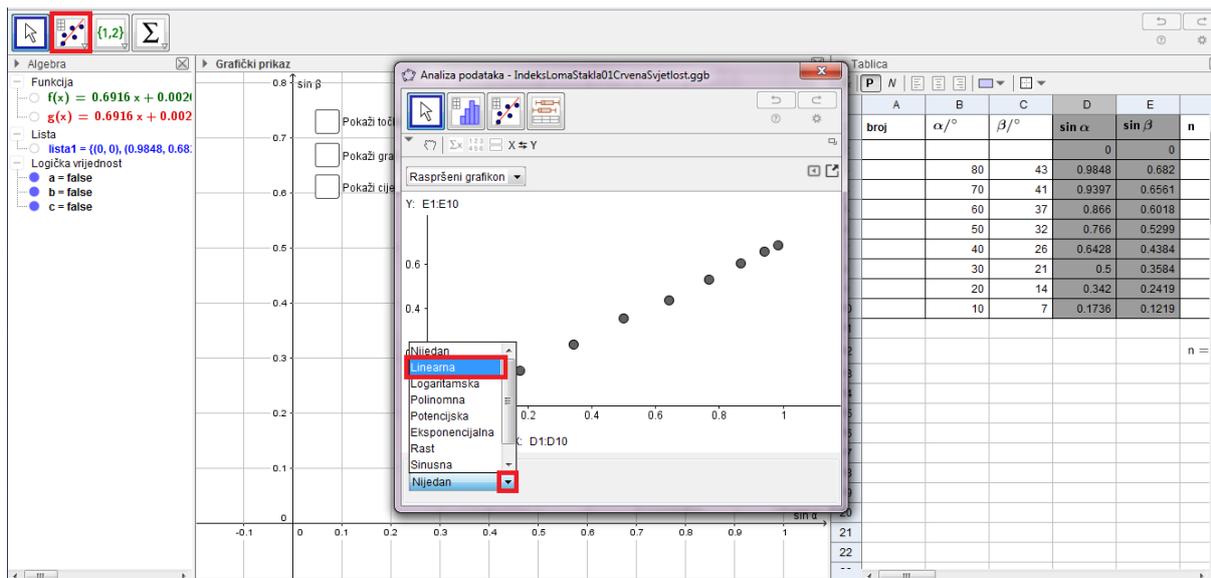
### Dvovarijabilna regresijska analiza

Nužno je za ovaj predmet pokazati učenicima crtanje grafova linearnih funkcija preko tablice u GeoGebri. Za taj postupak važno je znati koji stupac u tablici prikazuje varijablu, a koji vrijednosti funkcije koja opisuje podatke.

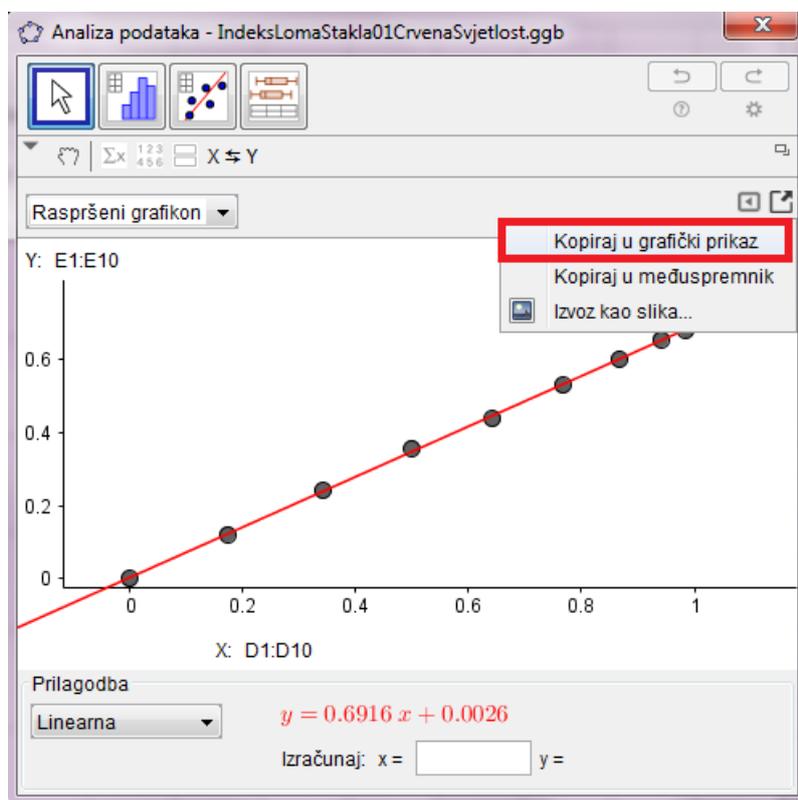
Crtnanje se vrši na sljedeći način:

- Označavanje stupca koji sadrži podatke koji ovise o nekoj varijabli,
- Označavanje stupca koji sadrži podatke o varijabli (na primjer vrijeme kod v-t grafa),
- Odabir opcije Dvovarijabilna regresijska analiza,
- Odabir opcije Linearna. (Slika 1.32.)

Nakon odabira ove opcije crta se pravac i prikazuje zapis linearne funkcije. Može se izračunati vrijednost funkcije za bilo koji  $x$ . (Slika 1.33.)



Slika 1.32. Crtanje grafa iz podataka u tablici



Slika 1.33. Linearna funkcija dobivena analizom podataka iz tablice

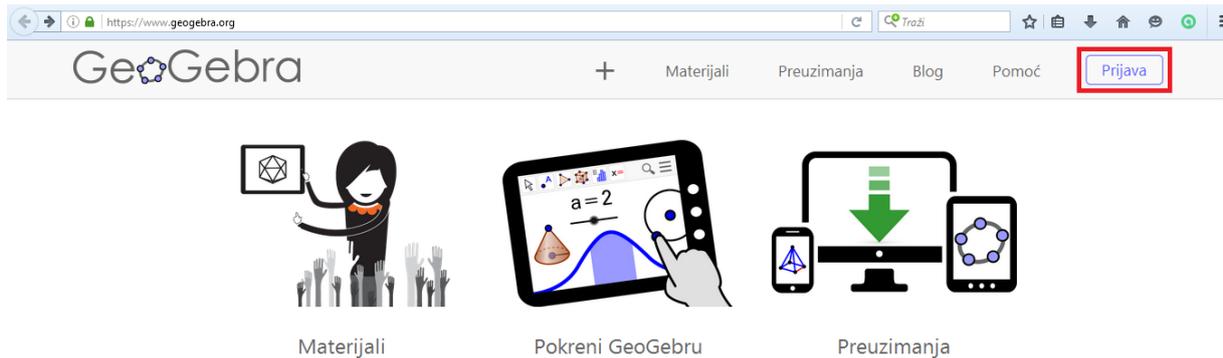
Opcija označena crvenim Kopiraj u grafički prikaz prebacuje pravac i točke u glavni prozor GeoGebra.

## GeoGebra online

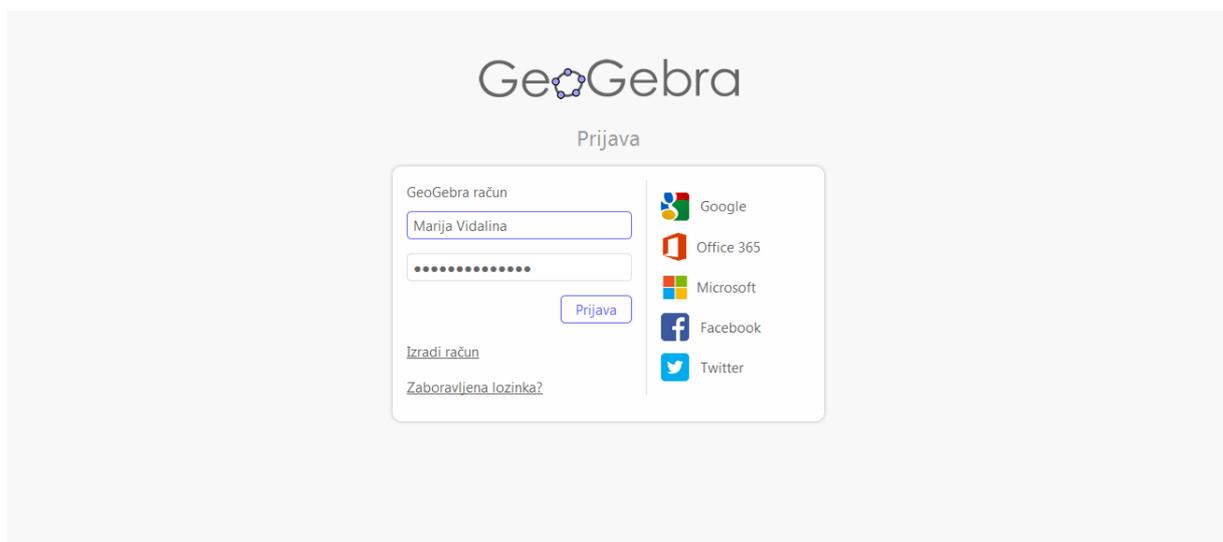
Svaki nastavnik može se besplatno registrirati na službeni GeoGebra portal gdje se nalazi mnoštvo gotovih GeoGebra datoteka koje se mogu koristiti. Na tom portalu bit će pohranjeni materijali ovog fakultativnog predmeta i oni će biti dostupni nastavnicima i učenicima koji se prijave u sustav, a također će ti materijali biti pohranjeni na Moodleu.

Na slikama 1.34. i 1.35. može se vidjeti način prijavljivanja na GeoGebra portal.

Nakon prijave korisnik ima pravo pristupiti mnoštvu materijala koji su javno postavljeni te može postavljati svoje materijale potpuno besplatno.



Slika 1.34. Geogebra online



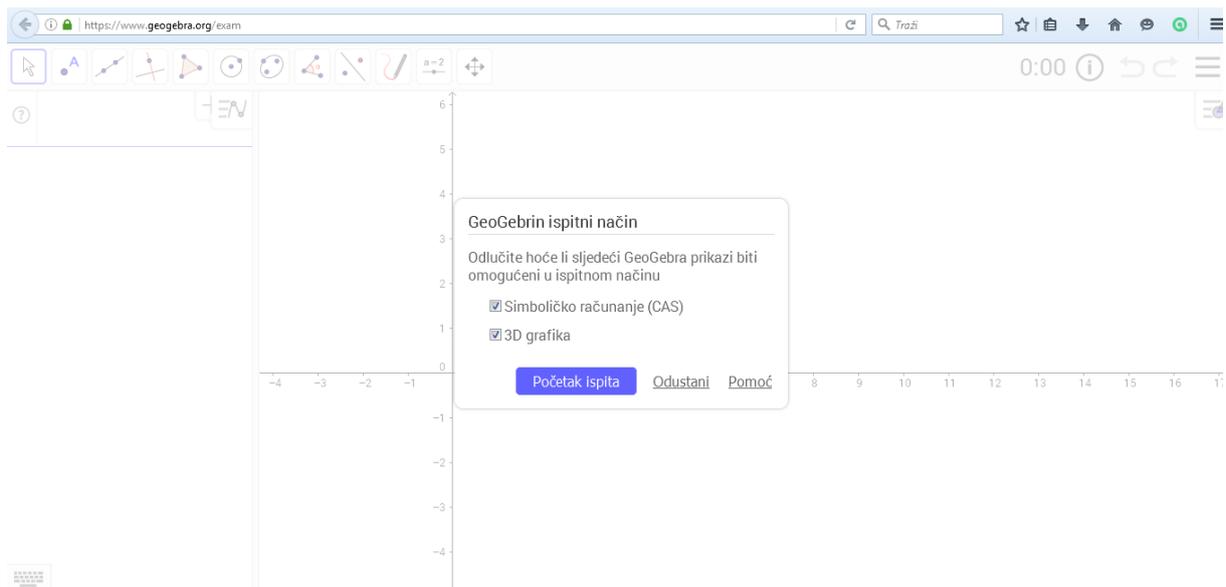
Slika 1.35. Geogebra online – prijava

## GeoGebra na pametnom telefonu

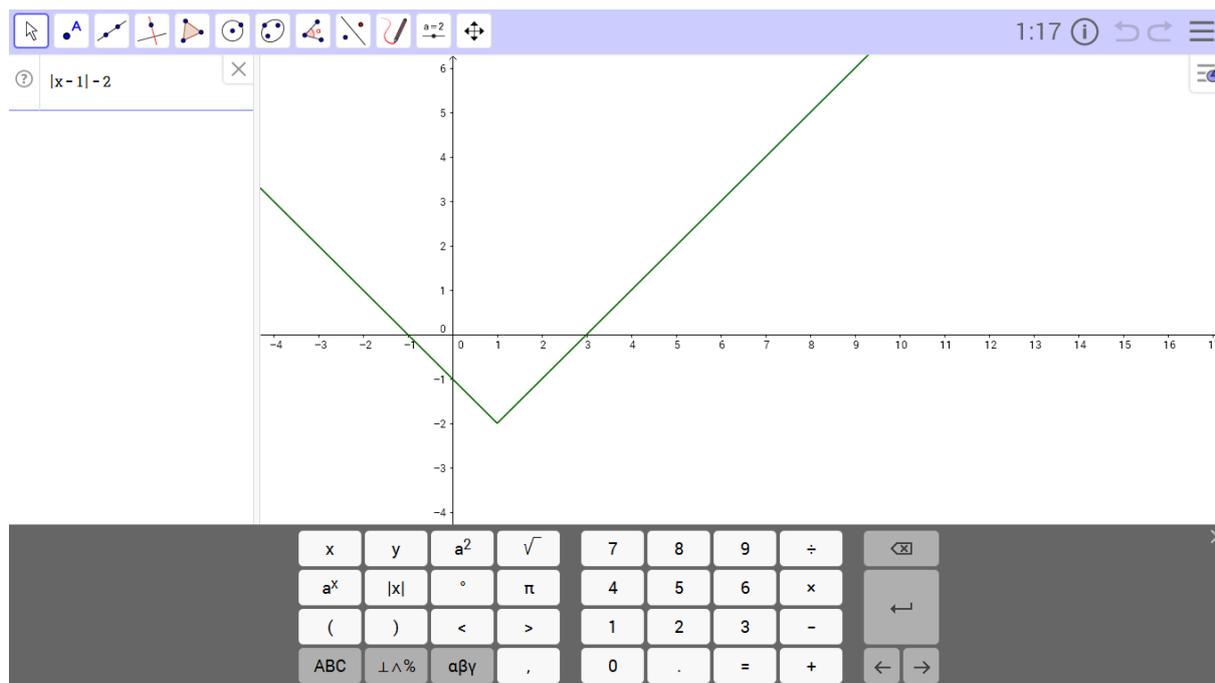
Za očekivati je da će učenicima biti zanimljivo što GeoGebru mogu koristiti i na svom pametnom telefonu, no zasada samo na sustavu Android. Preporuka je da se nastava ovog fakultativnog predmeta izvodi tako da svaki učenik ima svoje računalo, no smatramo da je dobro učenicima reći da mogu pogledati kako izgleda GeoGebra na pametnom telefonu te da je isprobaju.

## Ispitni način u GeoGebri

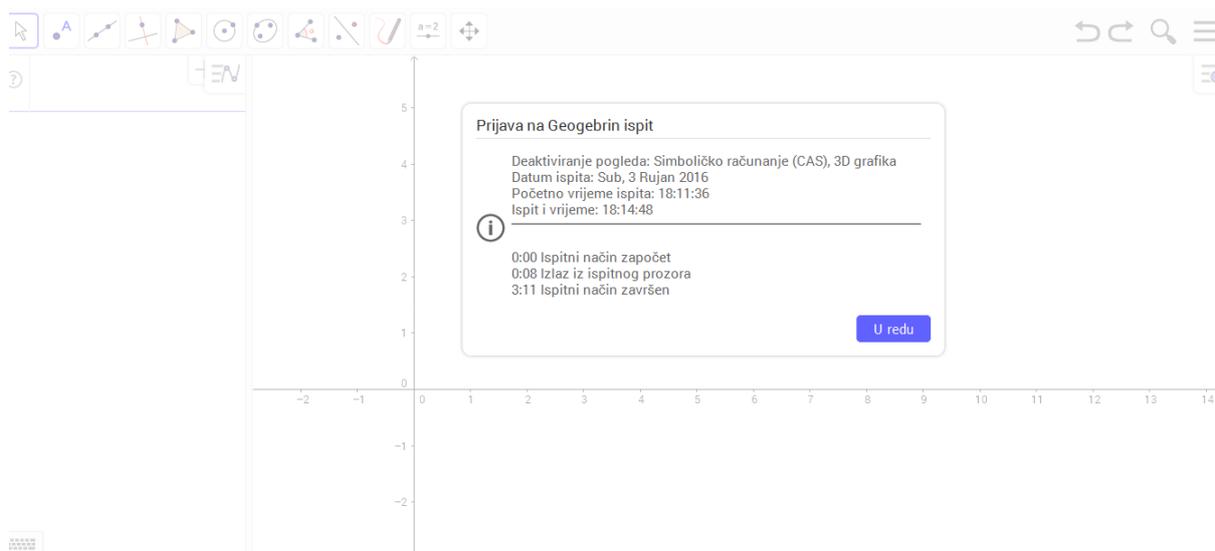
Nedavno je razvijeno nešto novo u GeoGebri: ispitni način. Ideja je učenicima omogućiti korištenje GeoGebre prilikom pisanja ispita na papiru. Realizirano je tako da učenici otvore web stranicu [www.geogebra.org/exam](https://www.geogebra.org/exam) i odaberu Ispitni način. (Slika 1.36.) Otvara im se GeoGebra preko cijelog ekrana. (Slika 1.37.) Učenik može zatvoriti cijeli ekran, no sustav to pamti. Kada učenik završi s ispitnim načinom, dobije sve podatke o ispitu: kada je započeo pisanje, kada je isključio cijeli ekran, kada ga je ponovno uključio i to za svaki put, kada je završio ispit te pod kojim je uvjetima ispit pisan (koje su mu opcije bile zabranjene). (Slika 1.38.) Ispitni način znači korištenje GeoGebre pri pisanju ispita, no naglasak se stavlja na cijeli ekran upravo zbog toga da se spriječi korištenje ostalih alata na računalu te sam Internet i njegove mogućnosti.



Slika 1.36. Ispitni način – početak ispita

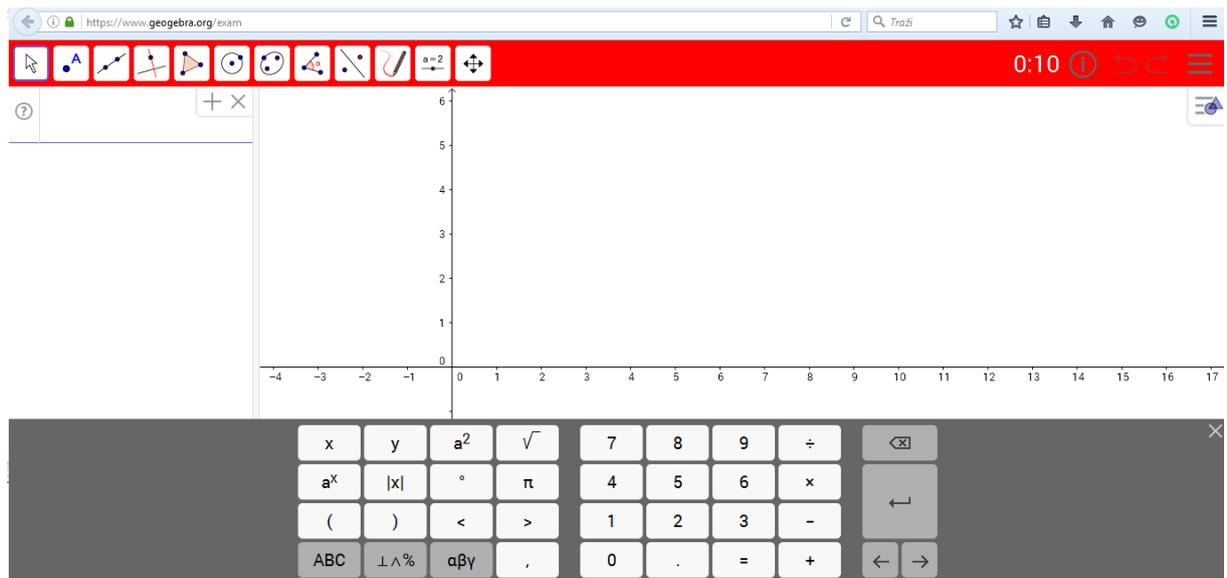


Slika 1.37. Ispitni način



Slika 1.38. Ispitni način – kraj ispita

Za ispitni način ne treba biti registriran na služenoj stranici GeoGebre. GeoGebrin ispitni način (GeoGebra Exam Mode) osmišljen je kao pomoć učenicima pri pisanju ispita, no ne dopuštajući korištenje drugih alata. Nastavnici trebaju imati na umu da sustav ne pamti podatke o uključivanju/isključivanju cijelog ekrana i ostale koji se prikazu pri završetku ispita. Ako žele te podatke, nastavnici mogu dogovoriti s učenicima slikanje ekrana i slanje na e-mail ili spremanje negdje da nastavnik može i kasnije vidjeti kako su učenici radili tijekom ispita te čuvati te podatke ako su mu potrebni. Tijekom ispita nastavnik može pratiti ponašanje učenika pri korištenju ispitnog načina jer je on napravljen tako da je pri isključivanju cijelog ekrana jedan dio ekrana obojen crvenom bojom pa je vrlo uočljiv. (Slika 1.39.)



Slika 1.39. Ispitni način – upozorenje

## 2. LINEARNA FUNKCIJA

Prijedlog broja sati: 10

ISHODI:

Na kraju učenja i poučavanja fakultativnog predmeta učenik:

- 2.1. Prepoznaje linearnu funkciju i pravac kao njezin graf,
- 2.2. Izračunava vrijednost linearne funkcije u pojedinoj točki,
- 2.3. Crta graf linearne funkcije,
- 2.4. Prepoznaje i tumači graf konstantne funkcije,
- 2.5. Iščitava osnovne karakteristike linearne funkcije iz njenog grafa (linearni rast ili pad, brzina promjene),
- 2.6. Povezuje matematičko znanje s rezultatima fizikalnog eksperimenta (prijeđeni put jednolikog gibanja linearno ovisi o vremenu  $s(t) = v \cdot t$ , brzina kod jednolikog gibanja linearno ovisi o vremenu  $v(t) = v_0 + (a \cdot t)$ ).

Funkcija  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  oblika  $f(x) = kx + l$ , gdje su  $k, l \in \mathbf{R}, k \neq 0$ , zove se **linearna funkcija**. Graf linearne funkcije jest **pravac**.

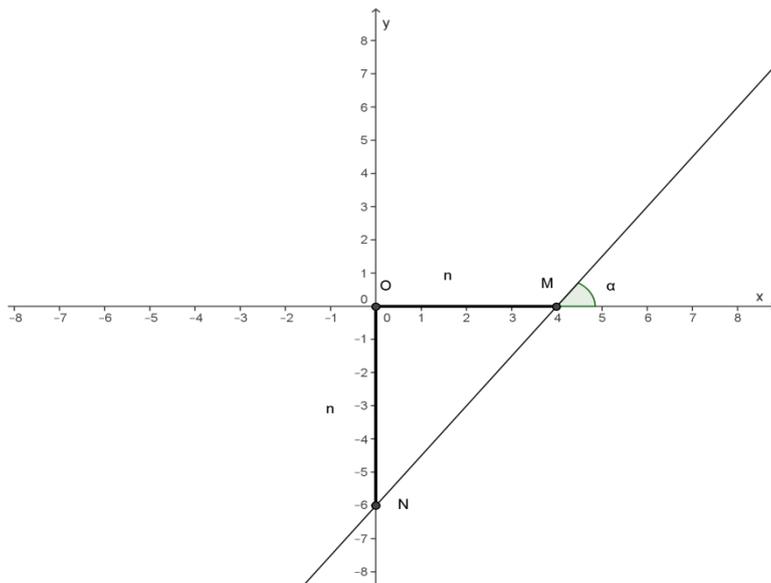
Jednadžbu oblika  $p \dots y = kx + l$  zovemo **eksplicitni oblik jednadžbe pravca**.

Pri tome je:  **$k$  – koeficijent smjera (nagib);**

**$l$  – odsječak na osi  $y$ .**

Ako je  $k = 0$ , funkcija  $f(x) = l$  zove se **konstanta** ili **konstantna funkcija** i njezin je graf pravac paralelan s  $x$  osi, koji  $y$  os siječe u točki  **$N(0, l)$** .

Jednadžbu oblika  $p \dots Ax + By + C = 0$  zovemo **implicitni (opći) oblik jednadžbe pravca** (to je linearna jednadžba s dvije nepoznanice, a skup je njenih rješenja pravac).

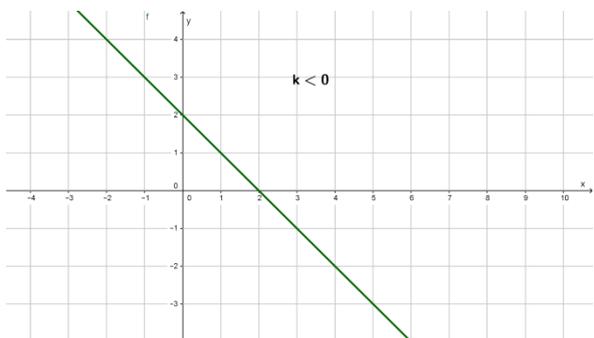


Slika 2.1. Pravac

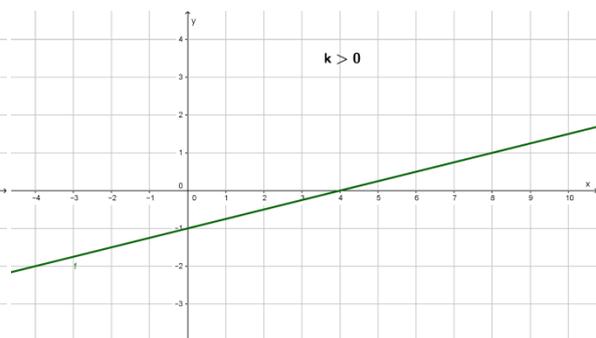
$\alpha$  – kut koji pravac  $y = kx + l$  zatvara pozitivnim dijelom osi  $x$ ,  $k = \text{tg}\alpha$ .

Točka  $\mathbf{M}(m, 0)$  sjecište je pravca  $y = kx + l$  s osi  $x$ , odnosno **nultočka** linearne funkcije  $f(x) = kx + l$ . Vrijedi  $f(m) = 0$ .

Tijek (tok) i predznak funkcije:



Slika 2.2. Padajuća linearna funkcija



Slika 2.3. Rastuća linearna funkcija

Što je  $|k|$  veće, funkcija je strmija.

## 2.1. Primjeri

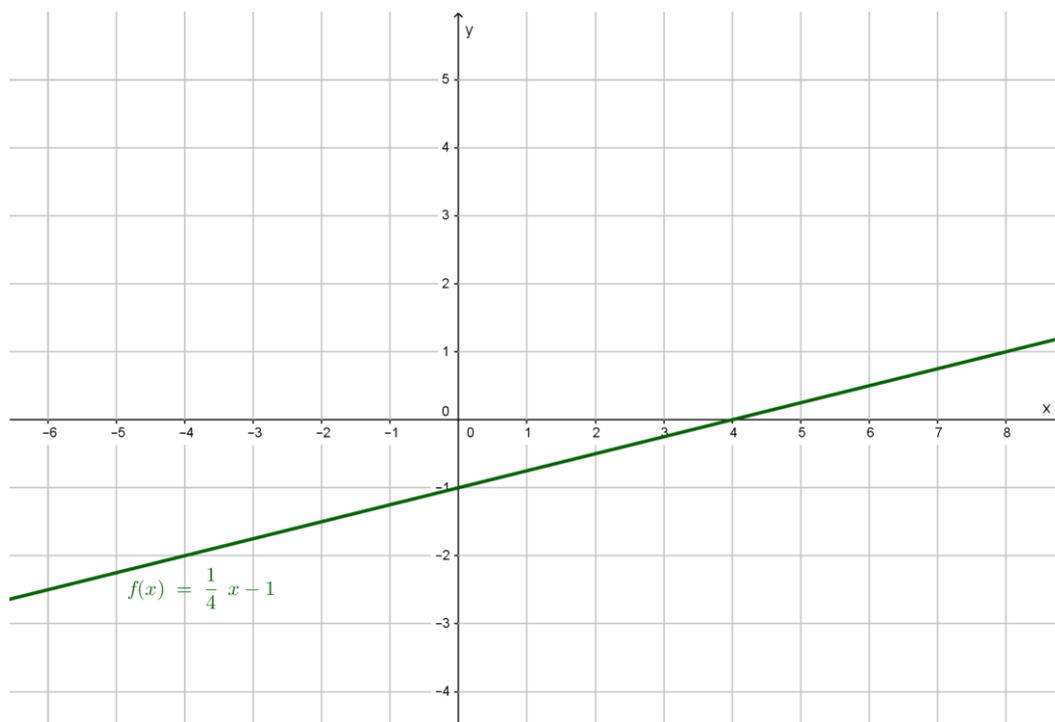
**Primjer 1.**  $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$

- 1) Nacrtajte graf funkcije,
- 2) Odredite nultočku,
- 3) Odredite sve realne brojeve za koje je  $f(x) \leq 2$ ,
- 4) Provjerite tačnost tvrdnje:  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{1}{4}$  za realne brojeve
  - a)  $x_1 = 1, x_2 = 3$
  - b)  $x_1 = -3, x_2 = 0$
  - c)  $x_1 = -1.3, x_2 = 0.7$

- 5) Pokažite da tvrdnja  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{1}{4}$  vrijedi za sve realne brojeve  $x_1, x_2$ .

Rješenja:

1)



Slika 2.4. Primjer 1.

- 2) Nultočka: riješiti jednačinu  $f(x_0) = 0$ 
$$\frac{1}{4}x_0 - 1 = 0$$
$$x_0 = 4$$
- 3) Riješiti nejednačinu  $f(x) \leq 2$  po nepoznatici  $x$ :
$$\frac{1}{4}x - 1 \leq 2$$
$$x - 4 \leq 8$$
$$x \leq 12$$

$$x \in \langle -\infty, 12 \rangle]$$

4) a) Uvrstiti:  $x_1 = 1, x_2 = 3$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot 3 - 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1 - 1\right)}{3 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

b) Uvrstiti:  $x_1 = -3, x_2 = 0,$

c) Uvrstiti:  $x_1 = -1.3, x_2 = 0.7 .$

5) Uvrstiti:  $f(x) = \frac{1}{4}x - 1;$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{1}{4}x_2 - 1\right) - \left(\frac{1}{4}x_1 - 1\right)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{4}(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{4} .$$

**Primjer 2.**  $f(x) = -x + 3$

1) Nacrtajte graf funkcije,

2) Odredite nultočku,

3) Odredite sve realne brojeve za koje je  $f(x) \leq 2,$

4) Provjeri tačnost tvrdnje:  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -1,$  za realne brojeve  $x_1, x_2.$

a)  $x_1 = 2, x_2 = 3$

b)  $x_1 = 0, x_2 = -1$

c)  $x_1 = 0.4, x_2 = 0.9$

5) Pokažite da tvrdnja  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -1$  vrijedi za sve realne brojeve  $x_1, x_2 .$

Rješenja:

1) slika 2.5.

2) Nultočka:  $x_0 = 3$

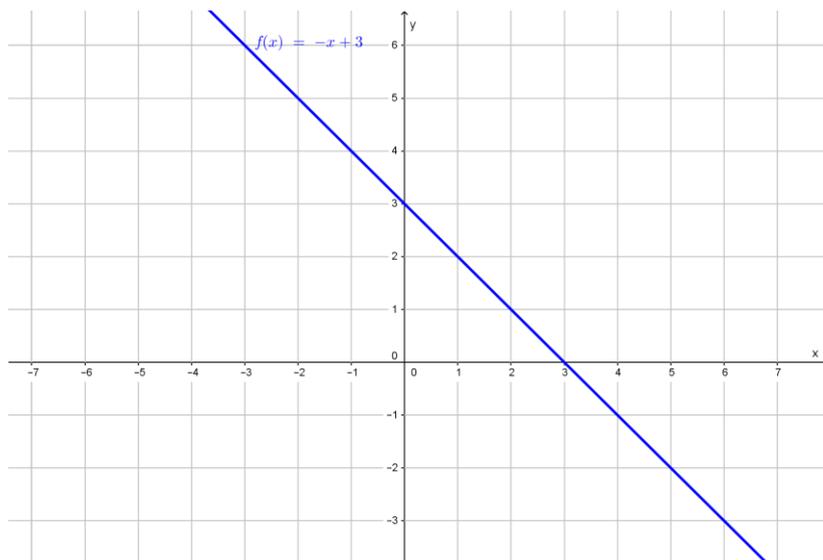
3) Riješiti nejednadžbu po nepoznanici  $x; x \in [1, +\infty)$

4) a) Uvrstiti:  $x_1 = 2, x_2 = 3$

b) Uvrstiti:  $x_1 = 0, x_2 = -1$

c) Uvrstiti:  $x_1 = 0.4, x_2 = 0.9$

5) Uvrstiti:  $f(x) = -x + 3$

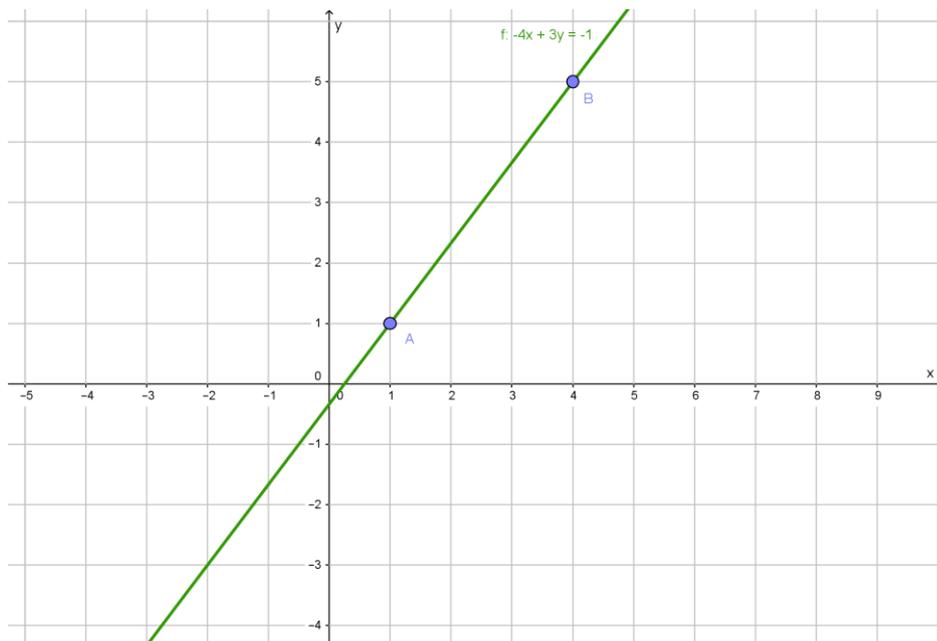


Slika 2.5. Primjer 2.

**Primjer 3.** Zadane su točke  $A(1,1)$ ,  $B(4,5)$ .

Nacrtajte pravac koji prolazi kroz te dvije točke. Odredite njegov koeficijent smjera.

Rješenje:

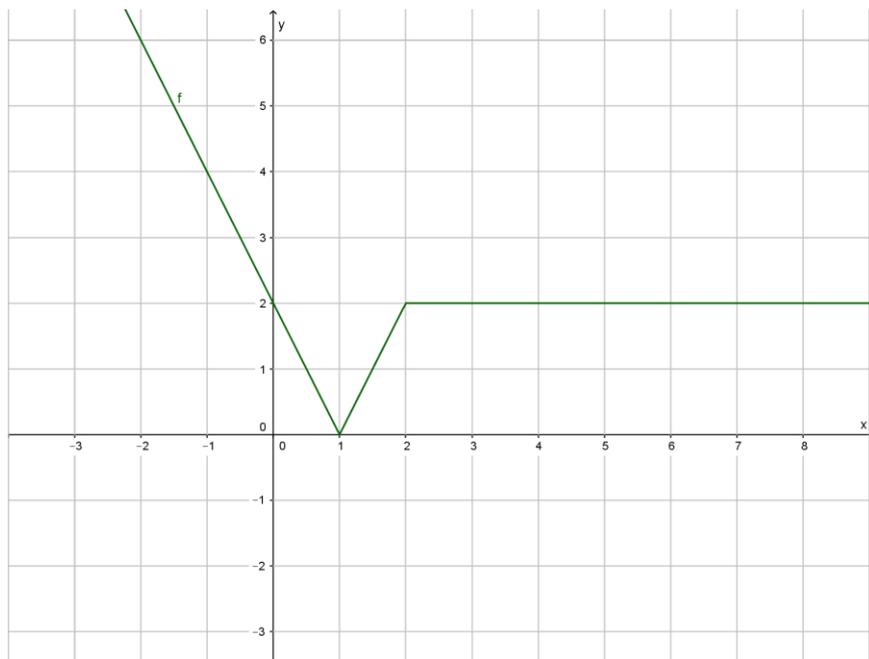


Slika 2.6. Primjer 3.

koeficijent smjera:  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tg}\alpha \Rightarrow k = \frac{4}{3}$

**Primjer 4.** Nacrtajte graf funkcije  $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x \leq 1 \\ 2x - 2, & 1 < x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$ .

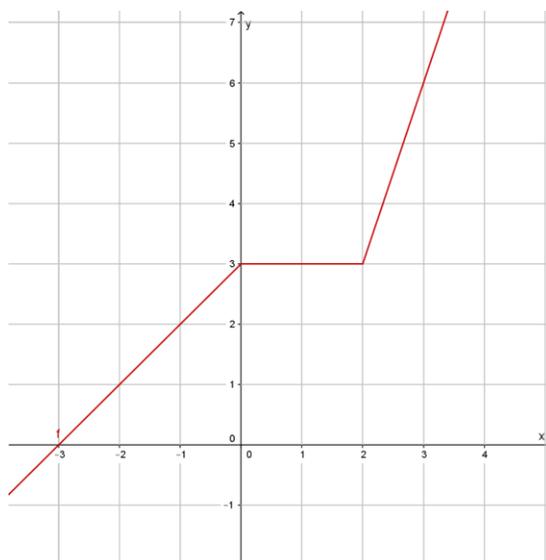
Rješenje:



Slika 2.7. Primjer 4.

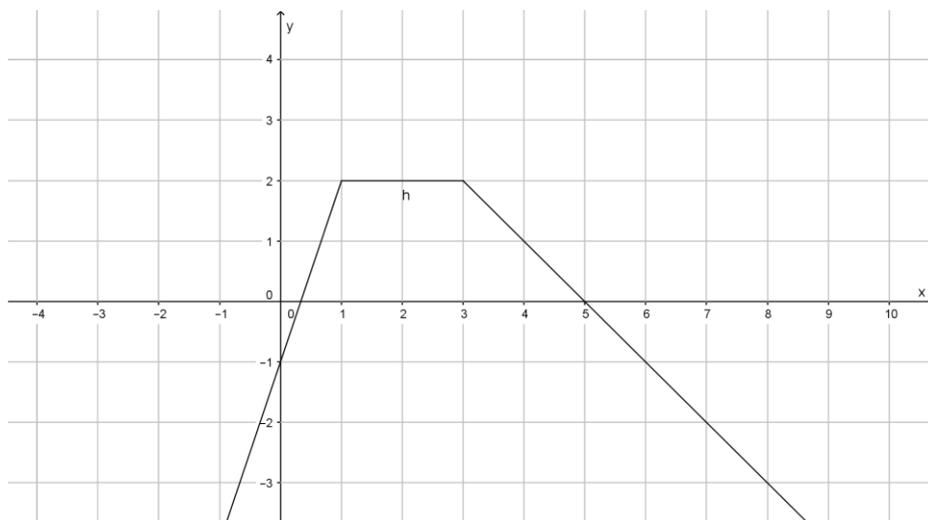
**Primjer 5.** Nacrtajte graf funkcije  $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 3, & x > 2 \end{cases}$ .

Rješenje:



Slika 2.8. Primjer 5.

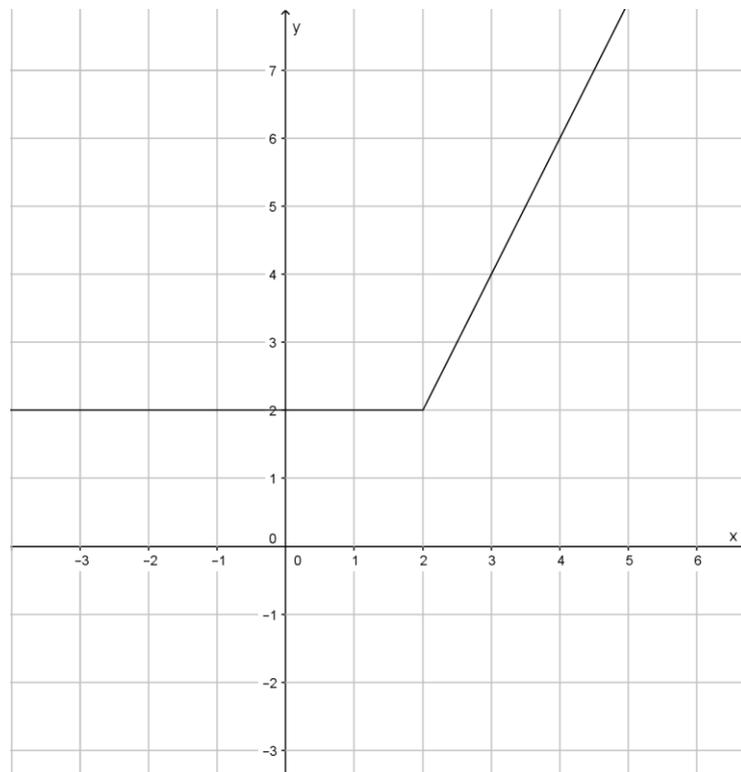
**Primjer 6.** Opišite tijek funkcije kojoj pripada graf:



Slika 2.9. Primjer 6.

Rješenje:  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 3 \\ -x + 5, & x > 3 \end{cases}$

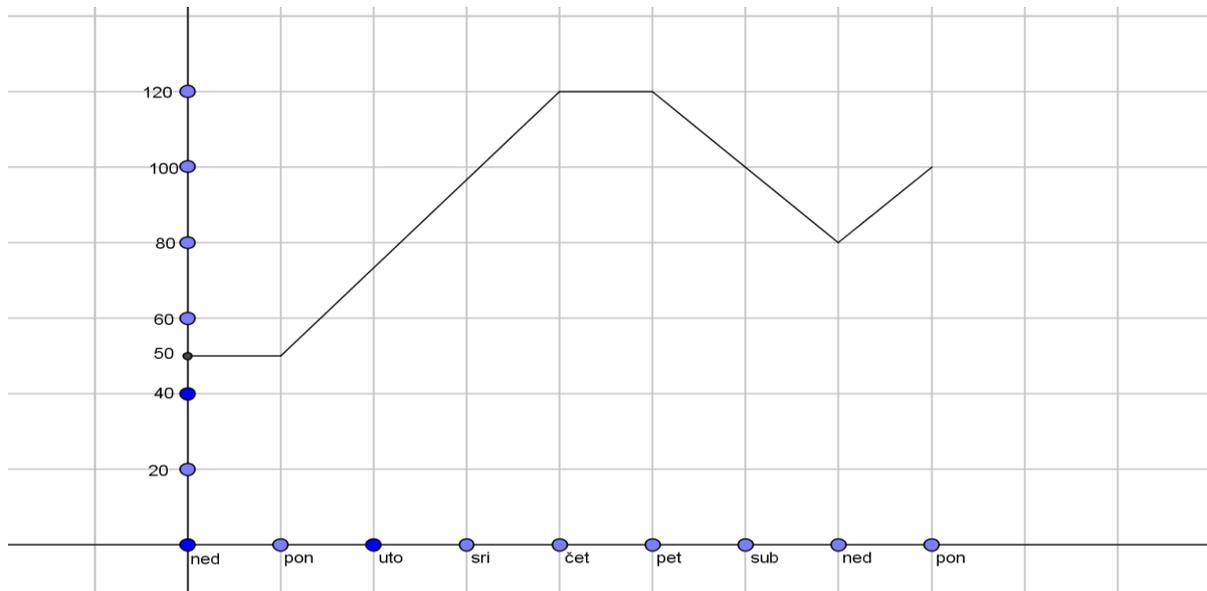
**Primjer 7.** Opišite tijek funkcije kojoj pripada graf:



Slika 2.10. Primjer 7.

Rješenje:  $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 2 \\ 2x - 2, & x > 2 \end{cases}$

**Primjer 8.** U Kirchbergu su tijekom jednog tjedna svaki dan u 6 h mjerili visinu snijega. Rezultati mjerenja iskazani su grafom:

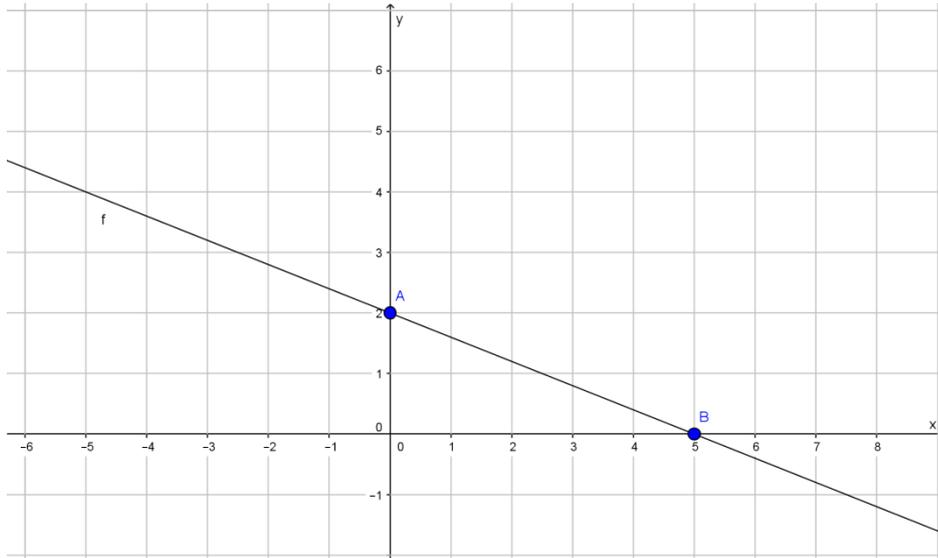


Slika 2.11. Primjer 8.

- 1) Kolika je visina snijega izmjerena u nedjelju?
- 2) Kada je prvi put izmjerena visina snijega od 120 cm?
- 3) Visina snijega rasla je tijekom mjerenja u dvama periodima. Koliko je ukupno snijega napadalo u tim periodima?

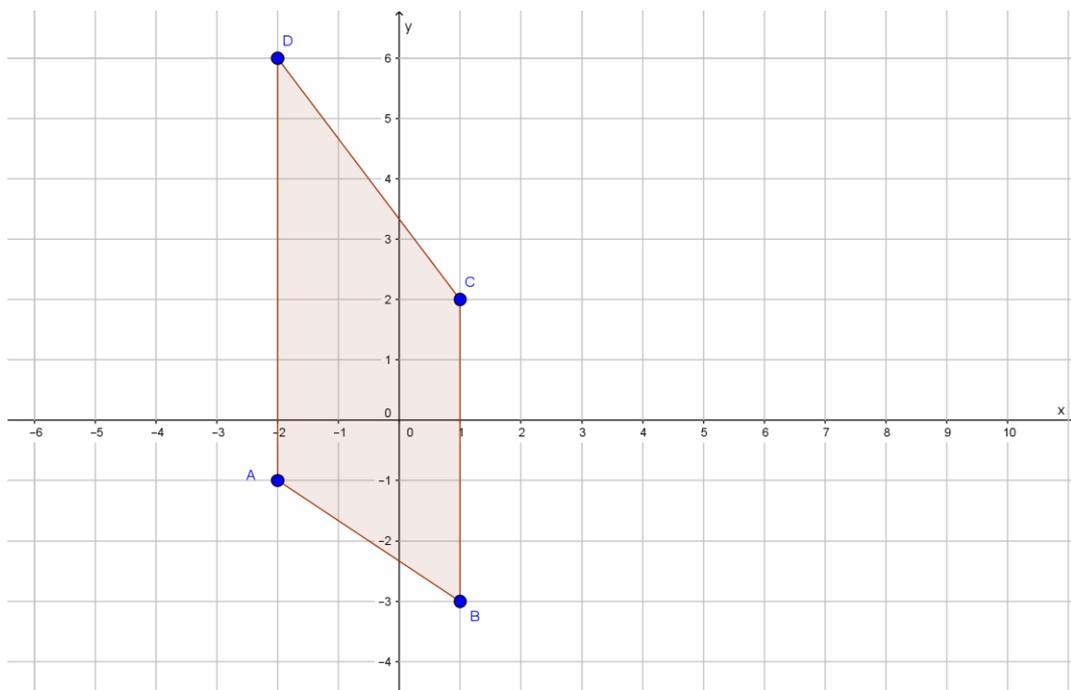
## 2.2. Zadaci za učenike za rad na satu

1. Odredite jednadžbu pravca prikazanog na slici:



Slika 2.12. Zadatak 1.

2. Nacrtajte pravac  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ . Odredite koeficijente  $k$  i  $l$  i nultočku  $x_0$ .
3. Odredite koeficijent smjera pravca  $3x + 4y - 12 = 0$ . Nacrtajte sliku!
4. Odredite nultočku pravca  $3x + 4y - 6 = 0$ . Odredite raste li pravac ili pada.
5. Nacrtajte grafove funkcija  $x = -2$  i  $y = 4$ .
6. Odredite linearnu funkciju čiji je graf pravac koji prolazi točkom  $(2,3)$  i ima koeficijent smjera  $-\frac{1}{2}$ . Nacrtajte.
7. Zadana je funkcija  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ . Nacrtajte graf i izračunajte koliko se promijeni vrijednost funkcije ako se vrijednost varijable poveća s  $-3$  na  $4$ .
8. Na slici je četverokut  $ABCD$ . Kolika je mjera kuta kod vrha  $B$ ?



Slika 2.13. Zadatak 8.

9. Luka je odlučio putovati biciklom. Za najam bicikla platio je 50 kuna te za svaku minutu vožnje još po 20 lipa.
- Odredite funkciju kojom možemo opisati cijenu  $C$  najma bicikla na vrijeme od  $t$  minuta.
  - Koliko je novaca Luka morao izdvojiti ako je bicikl vratio za 2 sata?
  - Koliko dugo može voziti bicikl da bi račun iznosio 100 kuna?
10. Formulom  $T(t) = -1.2t + 21$  prikazana je veza temperature u zamrzivaču i vremena koje je proteklo od njegovog uključenja. Pri tome je  $T$  temperatura iskazana u  $^{\circ}\text{C}$ , a vrijeme  $t$  u minutama.
- Kolika je temperatura u zamrzivaču jedan sat nakon uključenja?
  - Nakon koliko je minuta od uključenja temperatura u zamrzivaču pala na  $0^{\circ}\text{C}$ ?

### 3. VEKTORI

Prijedlog broja sati: 10

ISHODI:

Na kraju učenja i poučavanja učenik:

- 3.1. Objašnjava osnovne pojmove vezane uz vektore,
- 3.2. Određuje zbroj zadanih vektora koristeći pravilo trokuta, odnosno pravilo paralelograma,
- 3.3. Određuje umnožak vektora i skalara,
- 3.4. Opisuje i objašnjava ulogu jediničnih vektora  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$  u koordinatnom sustavu,
- 3.5. Prikazuje vektore i njihovu linearnu kombinaciju u koordinatnom sustavu,
- 3.6. Primjenjuje znanje o vektorima prilikom rješavanja zadataka u fizici (prikazuje jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno gibanje pomoću vektora u koordinatnom sustavu, koristi paralelogram sila).

#### 3.1. Osnovni pojmovi o vektorima

Neke veličine određene su samo svojim iznosom. Njih još nazivamo **skalarima** (npr. udaljenost, površina, rad, masa...). Veličine koje su određene svojim iznosom, smjerom i orijentacijom zovemo **vektorima** (npr. brzina, sila akceleracija...). Vektore obično predstavljamo usmjerenim dužinama. **Usmjereni dužina** jest dužina koja ima početak (hvatište) i kraj. Vektore označavamo malim slovima ( $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ...) ili navođenjem početne i završne točke ( $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{OT}$  ...) uz dodatak strelice.

**Iznos ili duljina vektora**  $\vec{a}$  udaljenost je njegove početne i završne točke i označava se sa  $|\vec{a}|$ .

Vektor duljine 0 naziva se **nul-vektor** i označava se  $\vec{0}$ .

**Smjer vektora** jest smjer pravca na kojem vektor leži.

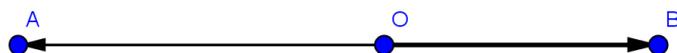
Vektori su **istog smjera** ili **kolinearni** ako leže na istom ili na paralelnim pravcima.

Kolinearni vektori mogu biti **jednake** i **suprotne** orijentacije.

Vektori  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  i  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  jednake su orijentacije ako se polupravci  $OA$  i  $OB$  podudaraju (kažemo da se točke  $A$  i  $B$  nalaze „s iste strane“ točke  $O$ ). Inače su suprotne orijentacije.



Slika 3.1. Vektori jednake orijentacije



Slika 3.2. Vektori suprotne orijentacije

Kolinearne vektore jednakih duljina i suprotne orijentacije zovemo **suprotnim vektorima** i označavamo s  $\vec{a}$  i  $-\vec{a}$ .

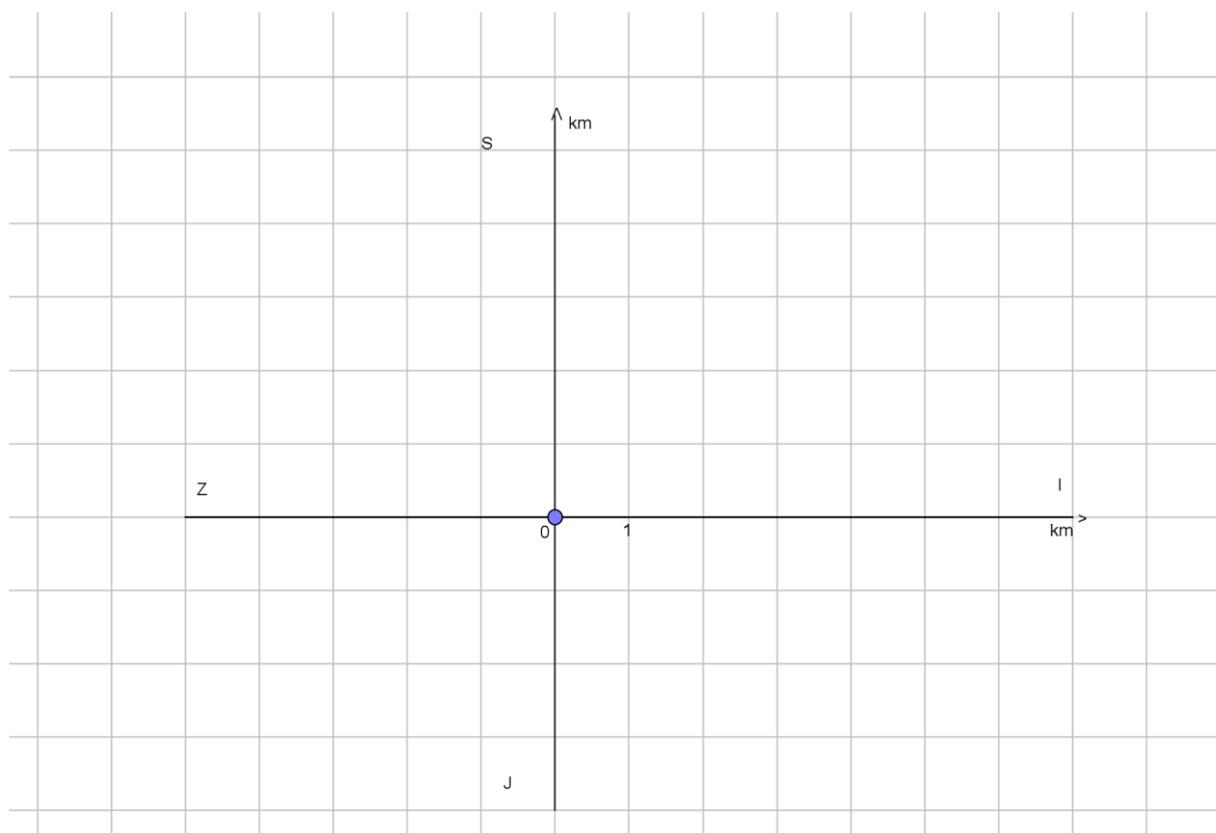
Dva su vektora **jednaka** ako imaju isti iznos, kolinearni su i jednako su orijentirani.

Uvjet jednakosti vektora možemo izreći i ovako:

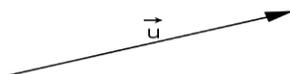
Vektori  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  i  $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$  jesu jednaki (pišemo  $\vec{a} = \vec{b}$ ) ako je četverokut ABDC paralelogram.

Za kolinearne vektore u ravnini kažemo još i da su **linearno zavisni vektori**. U protivnom vektori su **linearno nezavisni**.

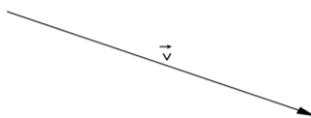
**Primjer 1.** Prikažite grafički put kretanja čovjeka koji hoda 2 km prema zapadu, potom 3 km prema sjeveru i onda 2 km prema jugoistoku (početak kretanja smještamo u ishodište koordinatnog sustava).



**Primjer 2.** Nacrtajte četiri vektora različitih duljina koji su kolinearni s vektorom  $\vec{u}$  :

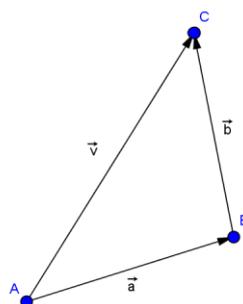


**Primjer 3.** Nacrtajte dva vektora suprotna vektoru  $\vec{v}$  :



## 3.2. Računske operacije s vektorima

### 3.2.1. Zbrajanje vektora po pravilu trokuta

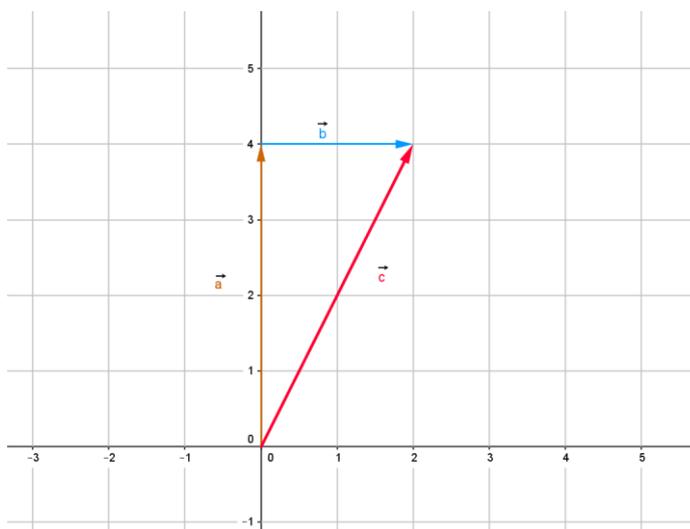


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Slika 3.3. Zbrajanje vektora po pravilu trokuta

**Primjer:**

Marko je čamcem trebao prijeći preko rijeke. Prikažite grafički put čamca ako je njegova brzina 4 m/s, a brzina rijeke je 2 m/s. Kolika je brzina čamca s obzirom na promatrača s obale?

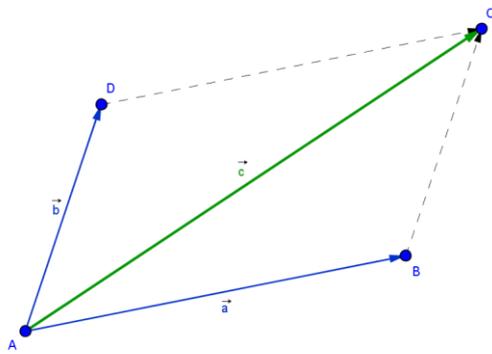


Slika 3.4. Zbrajanje vektora – primjer

$|\vec{a}|$  - brzina čamca  
 $|\vec{b}|$  - brzina rijeke  
 $|\vec{c}|$  - brzina čamca u odnosu na promatrača  
 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$     rezultatni vektor

$$\begin{aligned}
 |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \\
 |\vec{c}|^2 &= 4^2 + 2^2 \\
 |\vec{c}|^2 &= 20 \\
 |\vec{c}| &= 2\sqrt{5} \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

### 3.2.2. Zbrajanje vektora po pravilu paralelograma

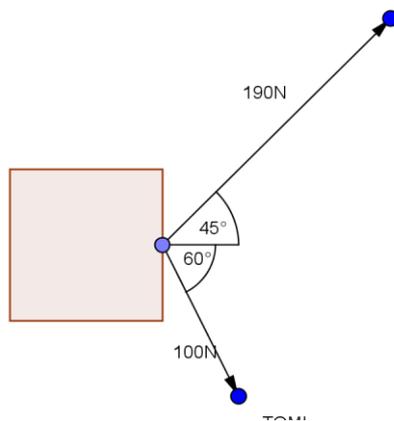


$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\
 \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}
 \end{aligned}$$

Slika 3.5. Zbrajanje vektora po pravilu paralelograma

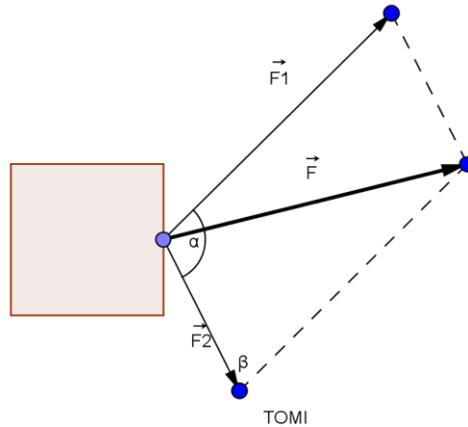
#### Primjer:

Luka i Tomi zajednički vuku kutiju kako je prikazano na slici.



Slika 3.6. Zbrajanje vektora – primjer

Luka vuče kutiju silom od 190 N pod kutom od 45° u odnosu na smjer kretanja. Tomi vuče silom od 100 N pod kutom od 60° u odnosu na smjer kretanja. Odredite vektor rezultatne sile. Koliki je iznos rezultatne sile?



Slika 3.7. Zbrajanje vektora – primjer

$$|\vec{F}_1| = 190 \text{ N}$$

$$|\vec{F}_2| = 100 \text{ N}$$

$$\alpha = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \beta \approx 36264.87629$$

$$|\vec{R}| \approx 190.43 \text{ N}$$

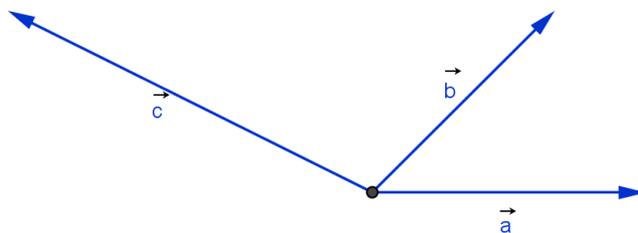
### 3.2.3. Množenje vektora skalarom

Umnožak vektora  $\vec{a}$  i skalara  $k$  jest vektor  $k\vec{a}$  za koji vrijedi:

1.  $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$
2. Za  $k > 0$  orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora  $\vec{a}$   
Za  $k < 0$  orijentacija mu je suprotna orijentaciji vektora  $\vec{a}$

Primjer:

Odredite vektor  $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$  ako je:



### 3.2.4. Linearna kombinacija vektora

Ako su  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  dva proizvoljna nekolinearna vektora, onda se svaki vektor  $\vec{c}$  ravnine određene vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  može na jedinstven način prikazati u obliku:

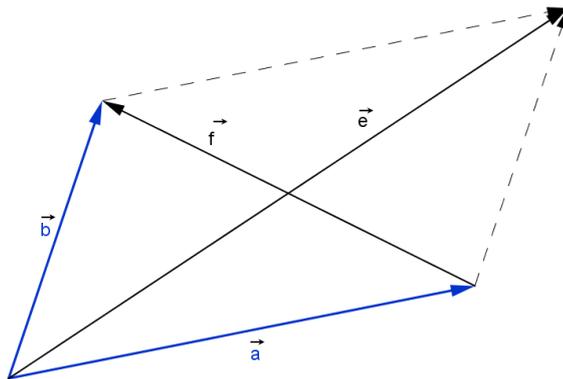
$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}; \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

U tom slučaju kažemo da je vektor  $\vec{c}$  **linearna kombinacija vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$**  ili da je vektor  $\vec{c}$  **rastavljen** na vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

Vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nazivamo **bazom** ravnine koju određuju.

**Primjer:**

Izrazite vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  pomoću vektora  $\vec{e}$  i  $\vec{f}$ :



Slika 3.8. Linearna kombinacija vektora – primjer

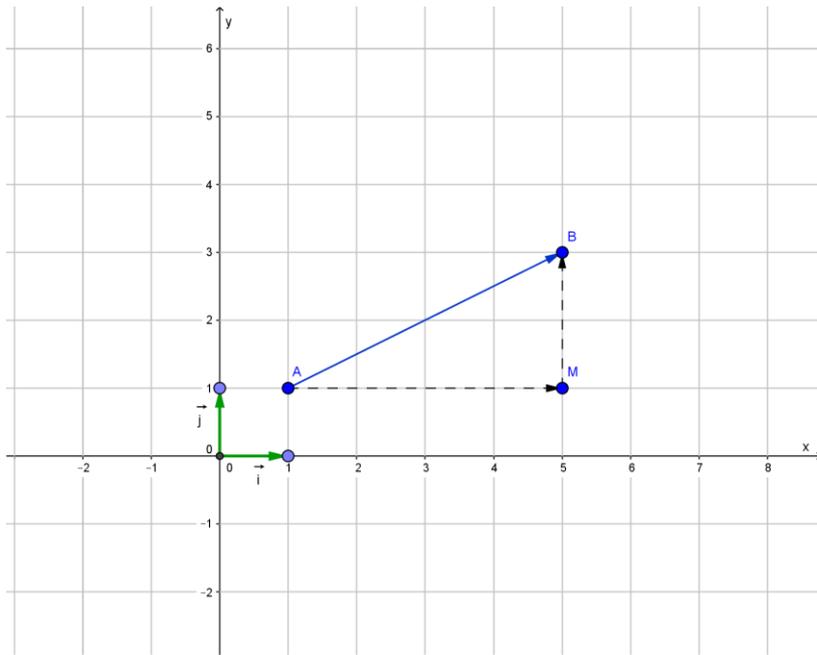
$$\vec{a} + \frac{\vec{f}}{2} = \frac{\vec{e}}{2} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{e}}{2} - \frac{\vec{f}}{2}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{e}}{2} + \frac{\vec{f}}{2}$$

### 3.2.5. Prikaz vektora u koordinatnom sustavu

**Primjer:**

$$A(1,1), B(5,3), \vec{a} = \overrightarrow{AB}$$



Slika 3.9. Prikaz vektora u koordinatnom sustavu

Vektori  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$  jesu jedinični linearno nezavisni vektori, tj.  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} \\ \overrightarrow{AB} &= (5 - 1)\vec{i} + (3 - 1)\vec{j} \\ \overrightarrow{AB} &= 4\vec{i} + 2\vec{j} \end{aligned}$$

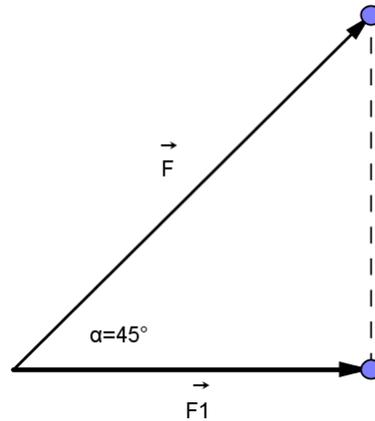
### 3.2.6. Skalarni umnožak vektora

Skalarni umnožak (produkt) vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  realni je broj (skalar) jednak umnošku duljina tih vektora i kosinusa kuta između njih:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad 0^\circ < \varphi \leq 180^\circ$$

#### Primjer:

Koliki rad obavi čovjek koji silom od 130 N vuče teret po kosini od  $45^\circ$  prema horizontali na putu dugom 10 m? (Rad je savladavanje sile na putu.)



Slika 3.10. Skalarni umnožak vektora – primjer

Tijelo se pod utjecajem sile  $\vec{F}$  pomiče duž horizontalne ravnine i pri ovom gibanju horizontalna komponenta  $\vec{F}_1$  sile  $\vec{F}$  savladava otpor trenja, tj. vrši rad  $W$  u smjeru vektora puta.

$$W = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{s}|$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \cos 45^\circ$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 45^\circ = 130 \cdot 10 \cdot \cos 45^\circ = 1300 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 650\sqrt{2} \text{ J}$$

Ako su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  prikazani kao linearna kombinacija vektora  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$ :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

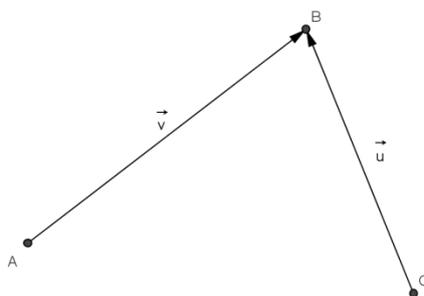
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

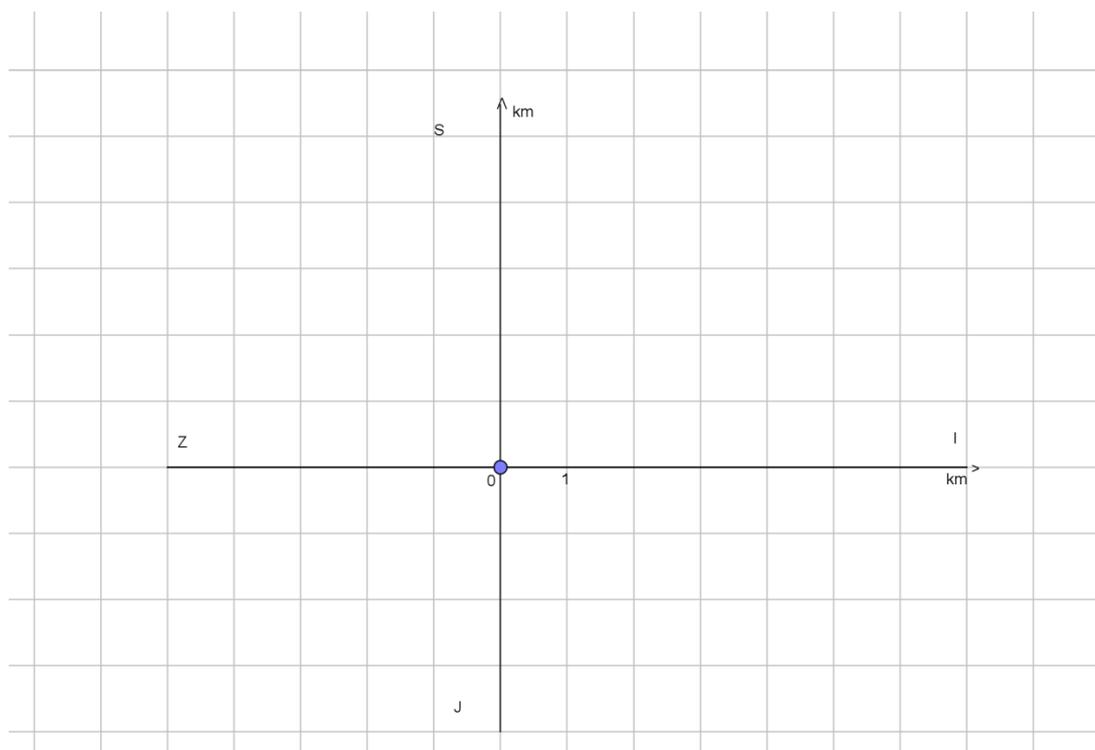
$$\cos \varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

### 3.3. Zadatci za učenike za rad na satu

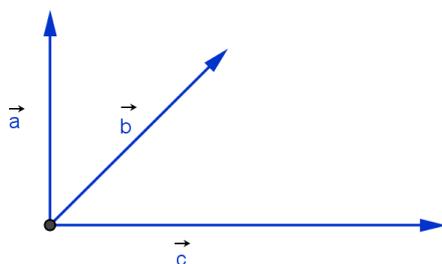
1. Za vektore na slici odredite vektor  $\vec{u} - \vec{v}$ .



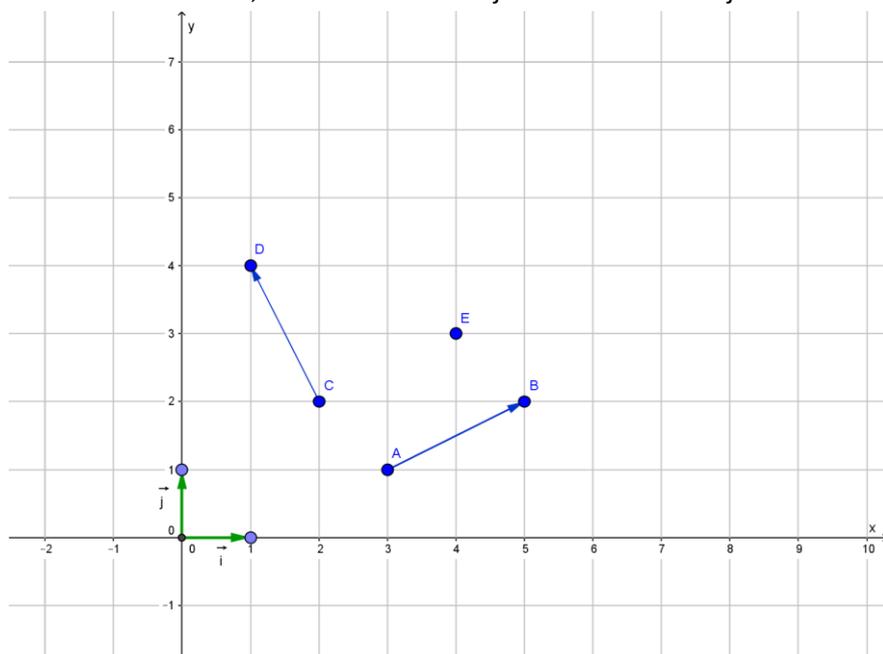
2. Prikažite grafički put kretanja Luke koji hoda 3 km prema zapadu, potom 3 km prema sjeveru i onda 2 km prema jugozapadu.



3. Za vektore sa slike odredite  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .



4. Brzina motora koji potiskuje avion iznosi 150 m/s. Avion leti od sjevera prema jugu. Vjetar brzine 45 km/h puše „u leđa“ avionu. Odredite brzinu i orijentaciju leta aviona.
5. Prikažite vektor  $\vec{p} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$  kao linearnu kombinaciju vektora  $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  i  $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$ .
6. Zadane su točke  $M(-2, -3), N(1, 1), P(-1, 2)$ . Vektor  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$  prikažite kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$ .
7. Zadani su vektori  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ . Računski i grafički odredite vektor  $\vec{a} + 2\vec{b}$ .
8. Zadani su vektori  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \alpha\vec{i} + \vec{j}$ . Odredite realni parametar  $\alpha$  tako da vektori budu:
  - a) okomiti,
  - b) kolinearni,
  - c) jednake duljine.
9. Odredite kut između vektora  $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$  i  $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$ .
10. Na slici su zadani vektori  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  i točka  $E$ . Ucrtajte točku  $F$  tako da je  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ .



## 4. DODATAK: GEOGEBRA APLETI

Uz dokumente koji dolaze za ovaj fakultativan predmet (Kurikulum, Priručnik za nastavnike i Priručnik za učenike) dostupni su i gotovi dinamički interaktivni apleti napravljeni u GeoGebri. Njima se može pristupiti preko službene stranice GeoGebre gdje su pohranjeni u obliku e-udžbenika pod nazivom *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* te preko platforme za e-učenje i poučavanje izrađene za ovaj predmet na Moodleu. U oba slučaja postavljeno je nekoliko apleta za učenje sadržaja cjeline Linearna funkcija i nekoliko za područje Vektori.

Na službenoj stranici GeoGebre napravljena je i grupa *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima* gdje su pohranjeni svi dinamički i interaktivni apleti.

Pri izradi materijala za ovaj fakultativan predmet rješenja gotovo svih zadataka napravljena su u GeoGebri. To su .ggb datoteke koje nisu dinamičke ni interaktivne, no apleti su .ggb datoteke u kojima se koriste klizači, potvrdni okviri i ostali objekti koji dovode do dinamičnosti te na takav način služe za učenje, ali svakako i za poučavanje. Velika je značajka što su neki apleti interaktivni što znači da učenici dobiju povratnu informaciju pri upisivanju rješenja zadatka. Davanjem povratne informacije učeniku smatramo da će se povećati želja i volja za samostalnim učenjem i proučavanjem nastavnih sadržaja te da će to dovesti do većeg razumijevanja sadržaja jer će učenik vidjeti različite slučajeve i moći sam razmisliti kada mu je rješenje točno, a kada nije te koji način razmišljanja dovodi do točnog rješenja.

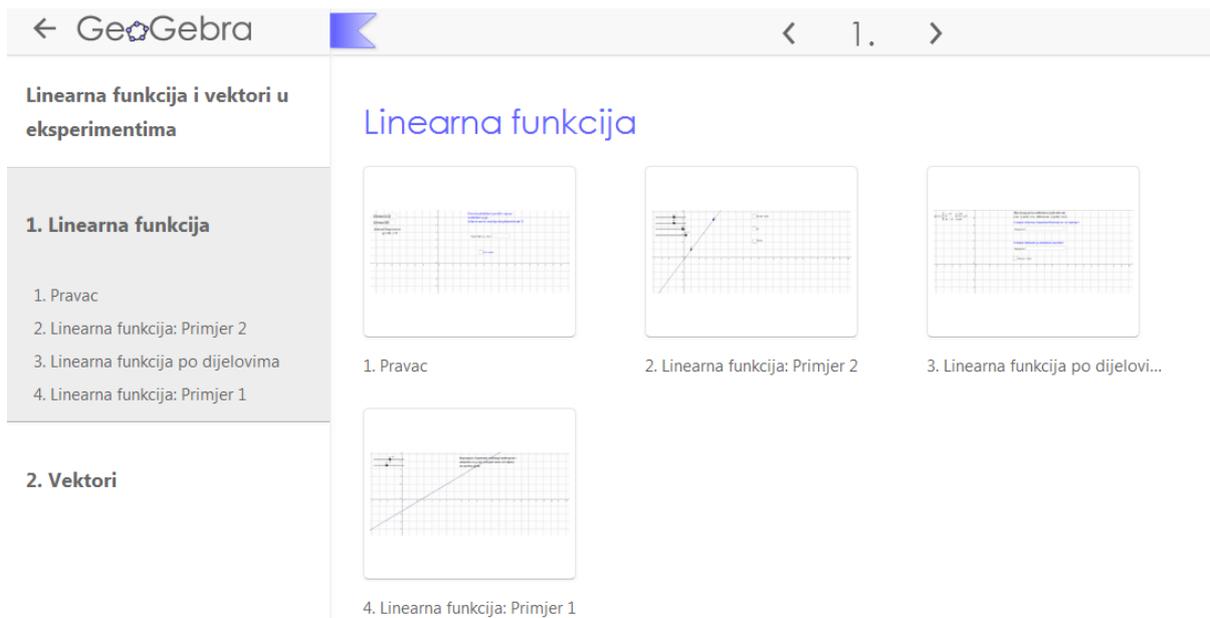
Apleti se izrađuju lokalno na računalu, a zatim se postavljaju na stranice GeoGebre te na Moodle. Sadržaji će se dopunjavati po potrebi.

### 4.1. e-udžbenik



The screenshot shows the GeoGebra web interface. At the top, there is a navigation bar with the GeoGebra logo and search, home, and menu icons. Below the navigation bar, the page title is "Linearna funkcija i vektori u eksperimentima" by Marija Vidalina, dated 12. ruj 2016. The main content area features a Venn diagram with two overlapping circles. The left circle is purple and labeled "LINEARNA FUNKCIJA" and "EKSPERIMENTIMA". The right circle is green and labeled "VEKTORI" and "EKSPERIMENTIMA". The intersection of the two circles is labeled "GeoGebra". Below the diagram, there is a "Sadržaj" (Table of Contents) section with two main categories: "1. Linearna funkcija" and "2. Vektori". Under "1. Linearna funkcija", there are four sub-items: "1. Pravac", "2. Linearna funkcija: Primjer 2", "3. Linearna funkcija po dijelovima", and "4. Linearna funkcija: Primjer 1". Under "2. Vektori", there are three sub-items: "1. Vektori - vježba1", "2. Vektori - vježba2", and "3. Množenje vektora skalarom".

Slika 4.1. Naslovna stranica e-udžbenika

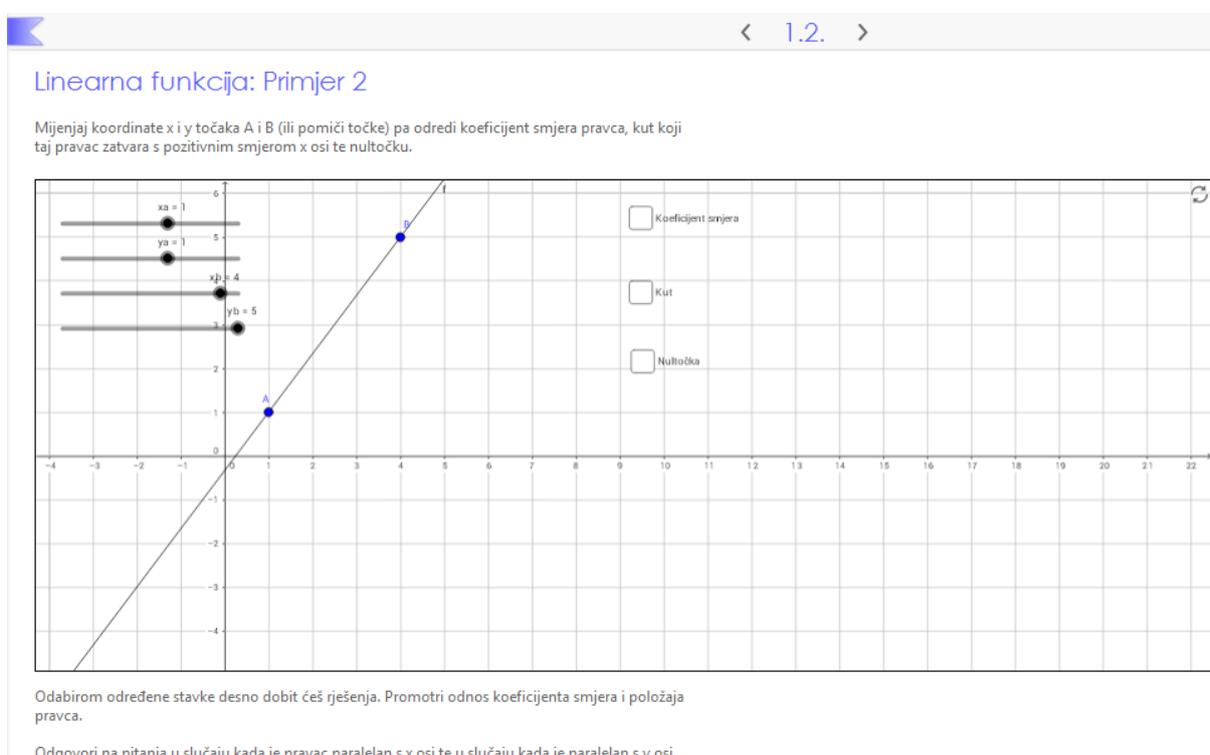


Slika 4.2. Cjelina Linearna funkcija u e-udžbeniku

Odabirom jednog od apleta on se otvara i učenik može istraživati.

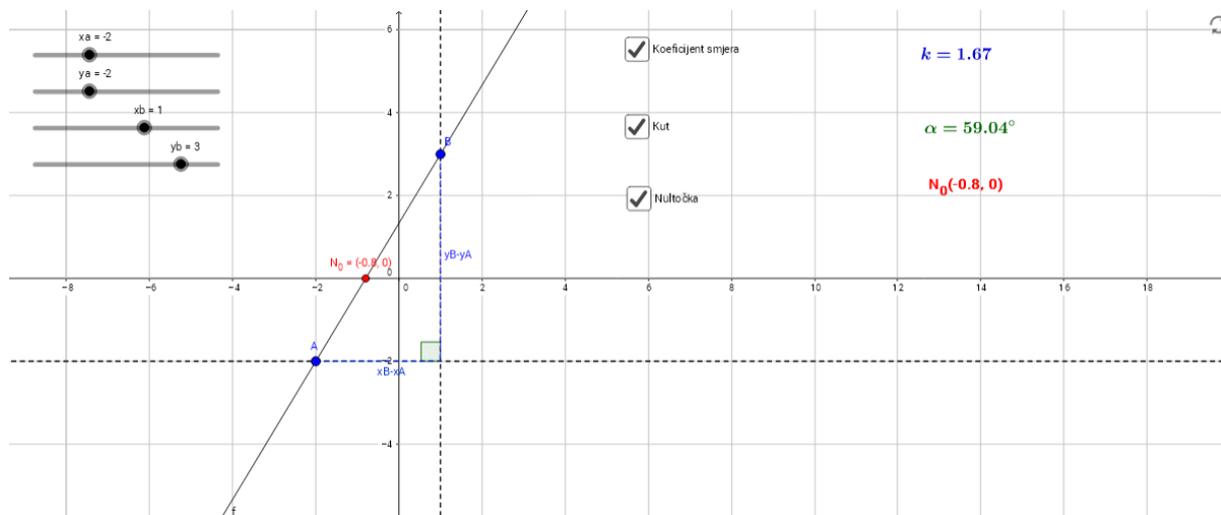
U nastavku će biti objašnjena tri apleta kao primjeri.

### Aplet 1. Linearna funkcija: Primjer 2.



Slika 4.3. Početni prikaz apleta

Mijenjajući vrijednosti klizača ( $x$  i  $y$  koordinate točaka  $A$  i  $B$ ) pomiču se točke. Ako je odabran potvrđni okvir, lijevo se prikazuje rješenje pa učenik može vidjeti kako se mijenja koeficijent smjera pravca, kut i nultočka s obzirom na položaj grafa linearne funkcije. (Slika 4.4.)



Slika 4.4. Dinamički aplet

## Aplet 2. Pravac

< 1.1. >

**Pravac**

Za pravac  $y = kx + l$  unesi  $k$  i  $l$  po volji te nacrtaj taj pravac. Zatim riješi zadatak desno i provjeri rješenje.

Unesi  $k$ :

Unesi  $l$ :

Jednadžba pravca:  
 $y = 0x + 0$

Unesi nultočku i sjecište s y osi u obliku  $(x, y)$ .  
(obavezan razmak prije y koordinate!)

Sjecište s y osi:

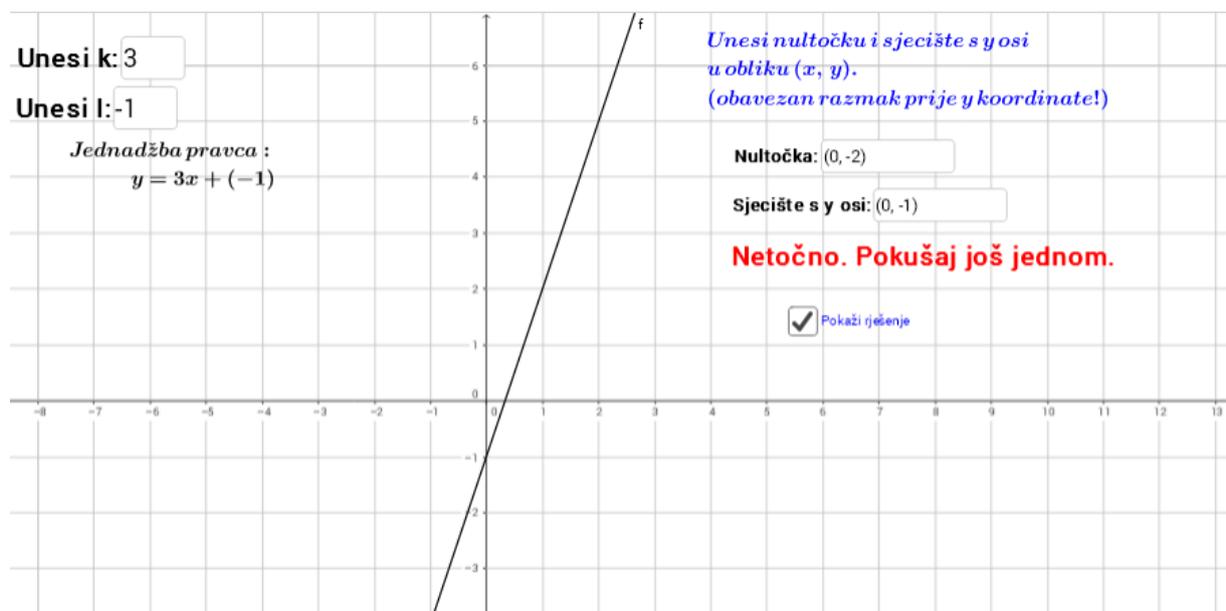
Pokaži rješenje

Slika 4.5. Početni prikaz apleta

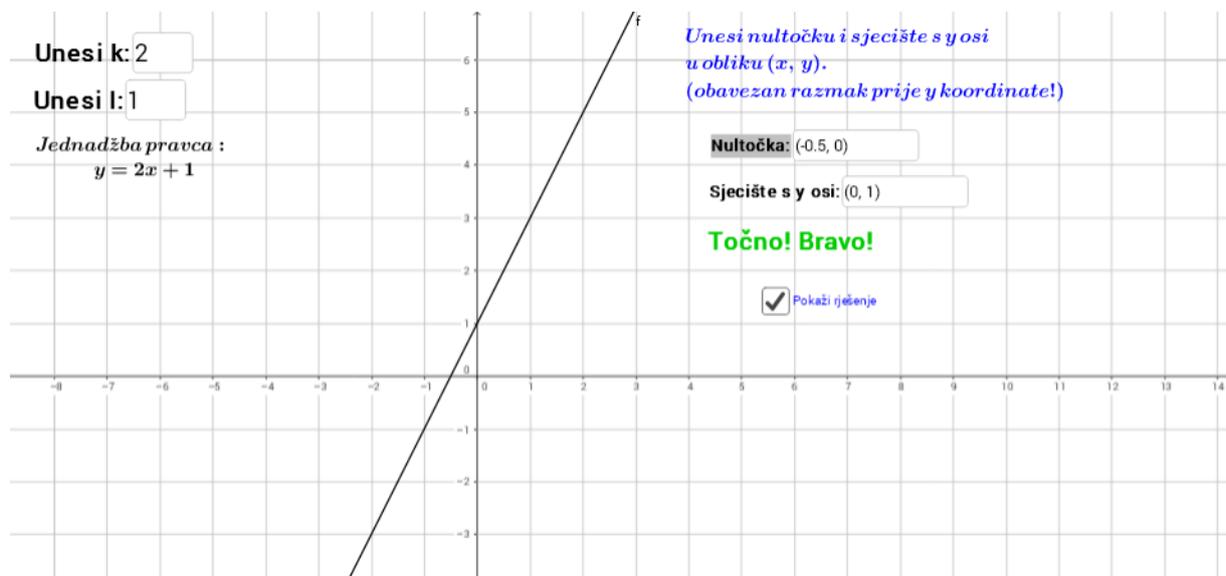
U ovom apletu učenik treba unositi različite vrijednosti za koeficijent smjera  $k$  i odsječak na  $y$  osi  $l$ . Ispod će mu se uvijek ispisati jednadžba pravca s vrijednostima koeficijenata koje je upisao, a odabirom potvrđnog okvira Pokaži rješenje prikazat će mu se graf. Inicijalne su vrijednosti za  $k$  i  $l$  nula i sve dok je tako učenik treba napisati koje je sjecište pravca s  $y$  osi. Kad unese vrijednost za  $k$  različitu od 0, učenik dobiva novo pitanje. Treba napisati nultočku. Učenik dobije povratnu

informaciju o točnosti oba odgovora koje je unio pri čemu je važno naglasiti uputu koju učenik ima za oblik unosa točke.

Pri kreiranju ovog materijala cilj je bio postignuti interaktivnost i to je u ovom slučaju ostvareno korištenjem naredbe za pretvaranje brojeva u tekst. Pri tome je trebalo biti oprezan jer je duljina objekta bila promijenjena pa je nužno u ovom obliku, kako je navedeno u apletu, unositi točke. Na taj način provjera unesenog izvršit će se na dobar način.



Slika 4.6. Aplet Pravac – netočan unos



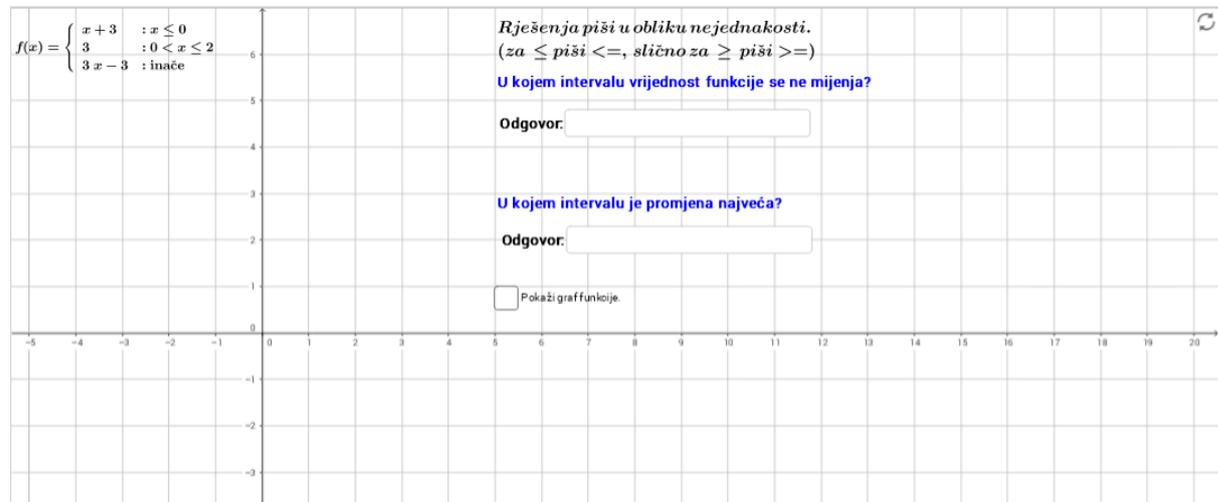
Slika 4.7. Aplet Pravac – točan unos

## Aplet 3. Funkcija zadana po dijelovima



### Linearna funkcija po dijelovima

Dana je funkcija. Nacrtaj njezin graf pa odgovori na dana pitanja.



Slika 4.8. Početni prikaz apleta

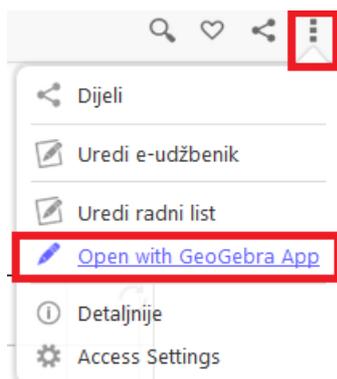
Ovaj aplet sličan je prethodno objašnjenom. Cilj je učenika navesti na razmišljanje o toku funkcije te utjecaju koeficijenta smjera na njega što će mu biti korisno pri obradi podataka dobivenih eksperimentom u fizici.

Nakon unosa odgovora učenik dobije povratnu informaciju, no u ovom apletu za svaki uneseni odgovor zasebno.



Slika 4.9. Aplet – rješenje

**Napomena:** Za uređivanje apleta, na primjer crtanje pravaca, potrebno je otvoriti aplet u posebnoj obliku, točnije preko *GeoGebra App* opcije. (Slika 4.10.)



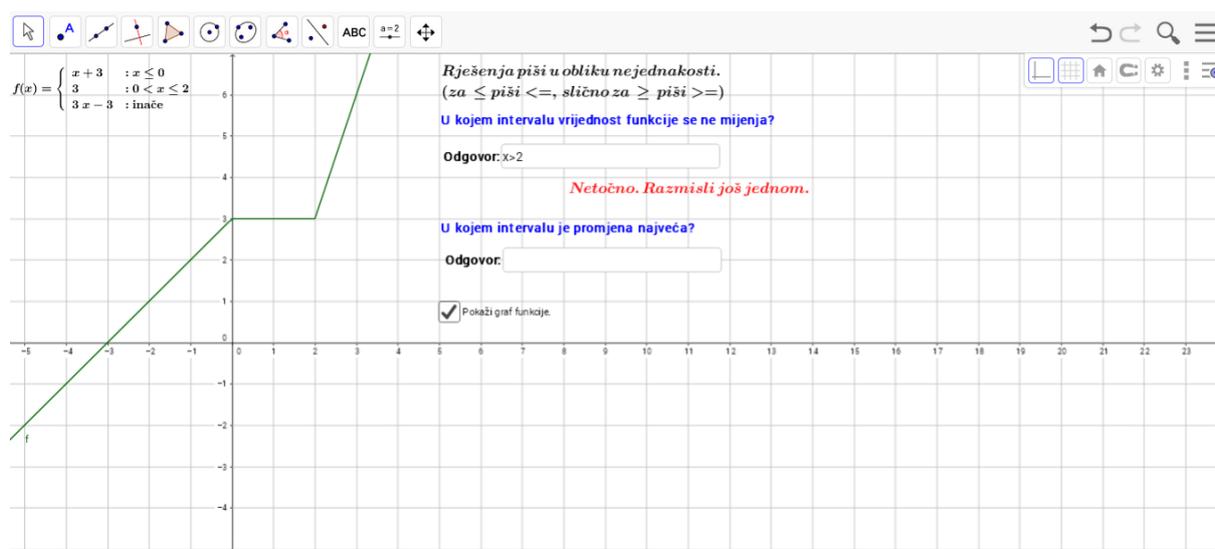
Slika 4.10. Uređivanje GeoGebra apleta

Ispod svakog apleta nalaze se pitanja različitog tipa: višestrukog izbora, kratkog odgovora... Odgovarajući na pitanja, učenici provjeravaju koliko su shvatili nastavne sadržaje koje su vježbali u određenom apletu. Apleti mogu poslužiti za vježbu i samostalan rad te mogućnost učenja same izrade interaktivnih dinamičkih apleta ukoliko to nekoga bude zanimalo.

Svi apleti su pohranjeni u grupi na službenoj stranici GeoGebre, stoga oni mogu poslužiti kao povratna informacija nastavniku o napredovanju učenika i razini na kojoj se njihovo znanje nalazi u određenom trenutku.

## 4.2. Apleti na Moodle-u

Na sljedećoj slici prikazan je aplet otvoren preko Moodlea. Apleti se na Moodle uvoze preko GeoGebra portala, no malo drukčije izgledaju nego u e-udžbeniku. Ovdje su učenicima dostupni svi alati kao da koriste GeoGebra lokalno pa mogu više toga mijenjati, dodavati...



Slika 4.11. Aplet otvoren preko Moodlea

## 5. LINEARNA FUNKCIJA U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA

Prijedlog broja sati: 12

ISHODI:

Na kraju učenja i poučavanja fakultativnog predmeta učenik:

- 5.1. Identificira zavisne i nezavisne veličine te ih grafički prikazuje,
- 5.2. Zapisuje uočeno kao funkciju,
- 5.3. Prepoznaje linearnu ovisnost u problemima u fizici,
- 5.4. Analizira utjecaj koeficijenata i nultočke na izgled grafa linearne funkcije i povezuje sa sadržajima u fizici.

### 5.1. Obrada rezultata mjerenja i račun pogrešaka

Mjerenje je postupak kojim se nepoznata fizička veličina uspoređuje sa standardom fizičkih veličina. *Pramjera* ili *etalon* predstavlja osnovnu mjeru, standard fizičkih veličina ili je to precizno napravljen uzorak mjera koji služi za provjeravanje istih takvih mjera koje su u uporabi. Rezultat je mjerenja neke fizičke veličine broj koji nam kazuje koliko je puta puta ta fizička veličina veća ili manja od etalona.

Mjerenje nam neće uvijek dati točnu vrijednost neke veličine jer se u svakom mjerenju pojavljuju pogreške. Razlozi za pojavljivanje pogrešaka mogu biti različiti, no najčešći razlozi za to jesu: nesavršenost mjernih instrumenata pomoću kojih obavljamo mjerenja, nesavršenost naših osjetila, ali ponekad je razlog i nepažnja onoga koji vrši mjerenje.

Fizičke veličine možemo mjeriti na dva načina: direktno i indirektno. Računski dobivamo vrijednost indirektno mjerenih veličina uz pomoć odgovarajućeg matematičkog izraza.

Kako je cilj svakog mjerenja odrediti točnu vrijednost nepoznate fizičke veličine, potrebno je provesti račun pogrešaka koji će nam omogućiti da utvrdimo odstupanje naših mjerenja od prave vrijednosti.

#### 5.1.1. Vrste pogrešaka

Pogreške mogu biti: sistemske, slučajne ili grube.

**Grube pogreške** javljaju se zbog pogrešnog očitavanja ili previda (omaške) tijekom mjerenja, a možemo ih izbjeći pažljivijim mjerenjima. Primjer: mjerite duljinu hodnika i umjesto 4,72 m upišete 4,27 m.

**Sistemske (sustavne) pogreške** najčešće se pojavljuju zbog neispravnosti pribora te krive metode mjerenja. Dakle nastaju zbog neispravnosti i moguće ih je ukloniti iako to nije uvijek lako.

**Slučajne pogreške** dovodimo u vezu s neizbježnom nesavršenošću mjernih instrumenata i naših osjetila (opažaća), ali i u vezu s utjecajima okoline koje ne možemo predvidjeti. Da bismo smanjili slučajne pogreške, trebamo izvesti veći broj mjerenja čije rezultate zatim obradimo statističkom analizom.

### 5.1.2. Račun pogrešaka za direktno mjerene veličine

Već znamo da je u svakom mjerenju prisutna slučajna pogreška u većoj ili manjoj mjeri pa ne možemo odrediti pravu vrijednost veličine koju mjerimo. Smatra se da je najbolja procjena prave vrijednosti određene veličine njezina srednja vrijednost ili aritmetička sredina svih rezultata mjerenja.

Neka su podatci koje dobijemo mjerenjem neke veličine:

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \dots c_n$$

Njihovu **srednju vrijednost (aritmetičku sredinu)** dobit ćemo tako da sve vrijednosti zbrojimo, a taj zbroj zatim podijelimo s brojem mjerenja:

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n}{n}$$

Odstupanja pojedinog mjerenja od vrijednosti  $\bar{c}$  nazivamo apsolutnim pogreškama. One iznose:

$$\bar{c} - c_1 = \Delta c_1$$

$$\bar{c} - c_2 = \Delta c_2$$

$$\bar{c} - c_3 = \Delta c_3$$

.

.

$$\bar{c} - c_n = \Delta c_n$$

Apsolutnu vrijednost  $\Delta c$  koja najviše odstupa od srednje vrijednosti  $\bar{c}$  nazivamo **maksimalna apsolutna pogreška**  $\Delta c_m$ .

Konačni rezultat za neku mjerenu veličinu pišemo na sljedeći način:

$$c = (\bar{c} \pm \Delta c_m)$$

s tim da se izvan zagrade mora napisati i pripadajuća mjerna jedinica.

Ako želimo procijeniti koliko je rezultat mjerenja točan, moramo odrediti **maksimalnu relativnu pogrešku**. Maksimalna relativna pogreška jest omjer između maksimalne apsolutne pogreške i srednje vrijednosti svih mjerenja, a može se izraziti i postotkom:

$$r_m = \frac{\Delta c_m}{\bar{c}} = \left( \frac{\Delta c_m}{\bar{c}} \cdot 100 \right) \%$$

#### **Primjer obrade rezultata mjerenja**

Zamislimo da želimo odrediti duljinu udžbenika. Kako bismo tu duljinu odredili što točnije, napraviti ćemo nekoliko mjerenja i zatim odrediti aritmetičku sredinu, maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pogrešku. Neka su na primjer mjerni podatci dani u Tablica 5.1.

Redni broj mjerenja	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
d/cm	27,9	28,15	27,95	27,95	27,93	27,91	28	27,9	28	28,1

Tablica 5.1. Rezultati mjerenja duljine (d) udžbenika.

Iz tih podataka možemo izračunati srednju vrijednost:  $\bar{d} = 27,8 \text{ cm}$

Sada možemo odrediti maksimalnu apsolutnu pogrešku:  $\Delta d_m = -0,17 \text{ cm}$

Rezultat mjerenja možemo sada napisati na sljedeći način:  $d = \bar{d} \pm \Delta d_m$

$$d = (27,98 \pm 0,17) \text{ cm}$$

Maksimalna relativna pogreška iznosi:

$$r_m = \left( \frac{\Delta d_m}{\bar{d}} \cdot 100 \right) \%$$

$$r_m = \left( \frac{0,171 \text{ cm}}{27,979 \text{ cm}} \cdot 100 \right) \%$$

$$r_m = 0,61 \%$$

### Zadatak 1.

Zamislamo da želimo odrediti širinu udžbenika. Izmjereni podatci dani su u tablici. Odredimo aritmetičku sredinu, maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pogrešku.

Redni broj mjerenja	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
b/cm	20,1	20	19,9	20,05	20	19,9	19,95	19,8	20	19,9

Tablica 5.2. Rezultati mjerenja širine (b) udžbenika

Rješenje:  $b = (19,96 \pm 0,16) \text{ cm}$ .  $r_m = 0,8 \%$

### 5.1.3. Račun pogrešaka za indirektno određene veličine

Često se događa da fizičke veličine ne mjerimo neposredno, nego ih izračunamo pomoću veličina koje smo neposredno izmjerili. Iz toga razloga možemo se zapitati kako pogreške izmjerenih veličina utječu na rezultate koje dobivamo računskim postupkom.

Sljedeća tablica omogućava nam izračunavanje apsolutne i relativne pogreške koje dobijemo pomoću pogrešaka izmjerenih veličina.

	Apsolutna pogreška	Relativna pogreška
$\bar{a} + \bar{b}$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{\bar{a} + \bar{b}}$
$\bar{a} - \bar{b}$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{\bar{a} - \bar{b}}$
$n \bar{a}$	$n \Delta a$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}}$
$\bar{a} \bar{b}$	$b \Delta a + a \Delta b$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$
$\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$	$\frac{b \Delta a + a \Delta b}{b^2}$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$
$\bar{a}^2$	$2a \Delta a$	$2 \frac{\Delta a}{\bar{a}}$

Tablica 5.3. Apsolutna i relativna pogreška

### **Primjer obrade rezultata mjerenja**

Odredite srednju vrijednost, apsolutnu i relativnu pogrešku površine jedne stranice udžbenika. Koristite podatke iz tablica 5.1. i 5.2.

$$P = d \cdot b$$

$$\bar{P} = \bar{d} \cdot \bar{b} = 558,46 \text{ cm}^2 \quad \Delta P = \Delta d \cdot \bar{b} + \bar{d} \cdot \Delta b = 7,89 \text{ cm}^2 \quad r = \frac{\Delta P}{\bar{P}} = 1,41\%$$

$$P = (558,46 \pm 7,89) \text{ cm}^2$$

### **Zadatak 2.**

- Izmjerite duljinu i širinu školske klupe. Neka to svaki učenik u razredu napravi za sebe, a potom treba sve rezultate zabilježiti na ploči.
- Odredite srednju vrijednost, apsolutnu i relativnu pogrešku duljine stola.
- Odredite srednju vrijednost, apsolutnu i relativnu pogrešku širine stola.
- Odredite srednju vrijednost, apsolutnu i relativnu pogrešku površine stola.

## **5.2. Istraživanja gibanja pod utjecajem stalne sile**

### **PREPORUKA:**

- Učenici bi trebali sami izvršiti zadatke iz primjera 1. uz malu pomoć nastavnika, nakon završenih svih zadataka provesti zajedničku analizu i povezivanje pojmova.
- Nakon toga učenicima prepustiti da naprave primjer 2. gdje bi trebali uočiti da sada kolica ne kreću iz mirovanja, nego imaju početnu brzinu.

**ZAKLJUČAK:** Zbog stalne sile tijelo se giba stalnom akceleracijom (jednoliku ubrzano), brzina je proporcionalna s vremenom,  $v$ - $t$  grafički prikaz jest pravac čiji koeficijent smjera odgovara akceleraciji tijela.

**NAPOMENA:** Nakon završenih svih vježbi iste primjere prikazat ćemo uz pomoć GeoGebre, njezinih mogućnosti prikazivanja grafa i određivanja funkcije koja najbolje odgovara pripadajućem grafu.

### Ponovimo i provjerimo

Gibanje tijela predstavlja promjenu njegovog položaja u odnosu na drugo tijelo. Promjena položaja tijela događa se u određenom vremenu. Fizičke veličine koje koristimo za opis gibanja stoga su put ( $s$ ) i vrijeme ( $t$ ). Pomoću ove dvije veličine možemo definirati druge koje nam pomažu u opisivanju gibanja.

Prije svega definiramo brzinu ( $v$ ): promjena položaja tijela u određenom vremenskom intervalu te akceleraciju ( $a$ ): promjena brzine u određenom vremenskom intervalu.

Algebarski izrazi koje koristimo jesu:  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  i  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

Promjenu položaja tijela u ovisnosti o vremenu možemo prikazati na različite načine: tablično (aritmetički); grafički (geometrijski) i algebarski (pomoću algebarskog izraza – formule).

Naš je zadatak upravo istražiti i povezati ova tri načina prikaza rezultata.

**Pokus:** Jednoliku ubrzano gibanje postiže se tako da se kolica pokreću utegom koji je konopcem vezan za kolica, a preko koloture visi na kraju stola te svojom težinom povlači kolica. Tada težina utega predstavlja stalnu silu koja uzrokuje gibanje kolica; ili nagibom stola, tada sila teža uzrokuje gibanje kolica. Na papirnu traku, koju smo pričvrstili na kolica, snimimo pomoću tipkala gibanje kolica pod utjecajem stalne sile.

**Primjer 1.** Analiziranjem tragova tipkala na traci prijeđeni put kolica za određeno vrijeme prikazan je u tablici Tablica 5.4.

$t/s$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
$s/cm$	0	0,6	1,8	3,5	5,8	8,6	12	16	20,5	25,6	31,3	37,6	44,5	52

Tablica 5.4. Prijedeđeni put kolica

**Zadatak 1.** Na milimetarskom papiru nacrtajte  $s$ - $t$  grafički prikaz ovoga gibanja.

Da bi rezultate mjerenja prikazali u  $s$ - $t$  grafičkom prikazu ili dijagramu (grafički), potrebno je da nastavnik raspravi s učenicima kako se podatci prikazuju grafički. Ovo je dobro napraviti kod prve vježbe; nakon toga će učenici i sami moći crtati ovisnost veličina.

Neka pitanja koja će nam pomoći pri raspravi:

Što su koordinatne osi i kako se označavaju?

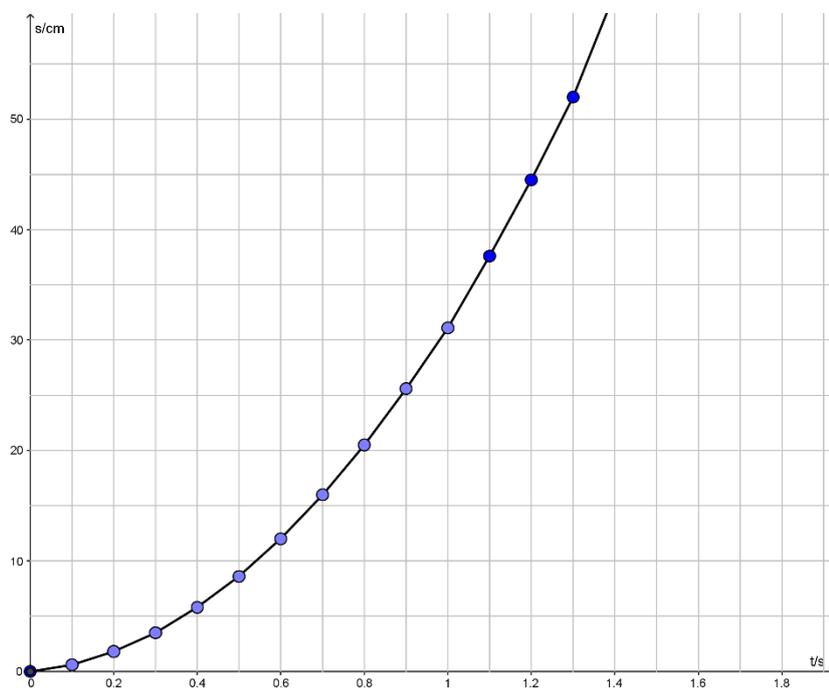
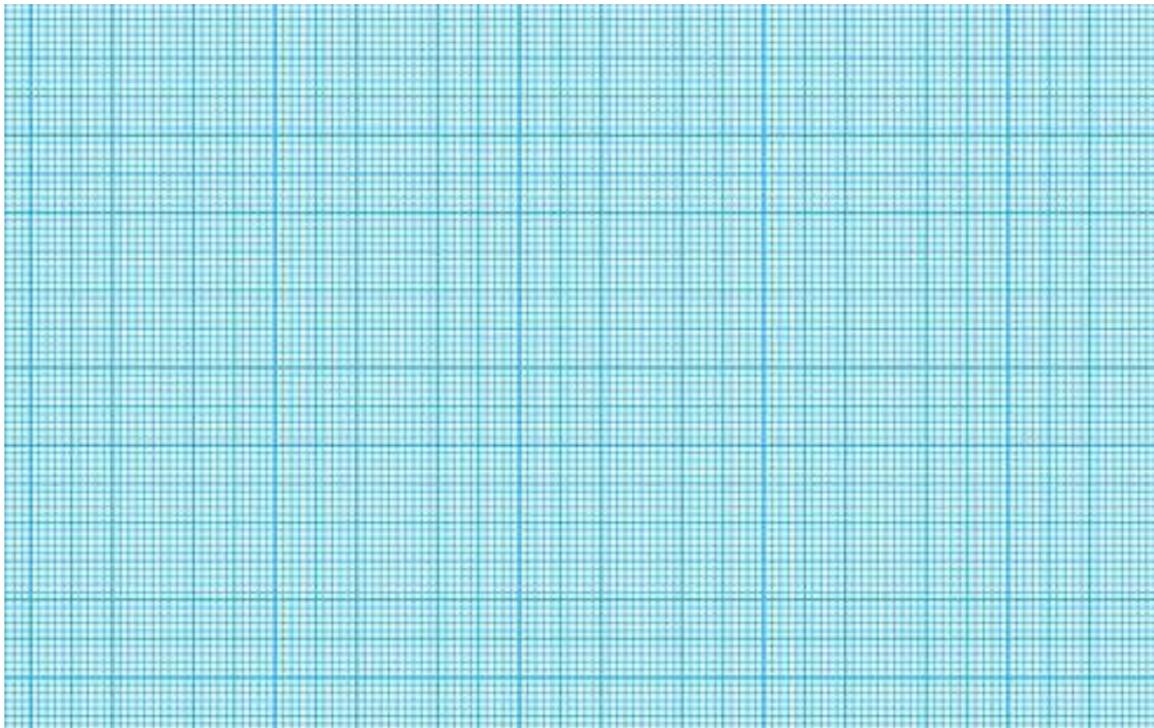
Što je zavisna, a što nezavisna varijabla ili veličina?

Kako označavamo koordinatne osi i zašto?

Koja je veličina od ovih koje smo mjerili nezavisna, a koja je zavisna varijabla?

Kako ćete odrediti skale (podjele) koordinatnih osi na grafičkom prikazu?

Napomena: možemo učenicima kopirati milimetarski papir, a možda će biti bolje ako rade na svom.



Slika 5.1. s-t grafički prikaz

**Zadatak 2.** Prepoznati krivulju na grafičkom prikazu.

Učenici vjerojatno neće odmah vidjeti da je to parabola, nego će vidjeti da je neka krivulja koja nije pravac pa ih razgovorom treba pokušati dovesti do tvrdnje da se radi o paraboli, ali o tome ćemo više kada budu crtali u GeoGebri.

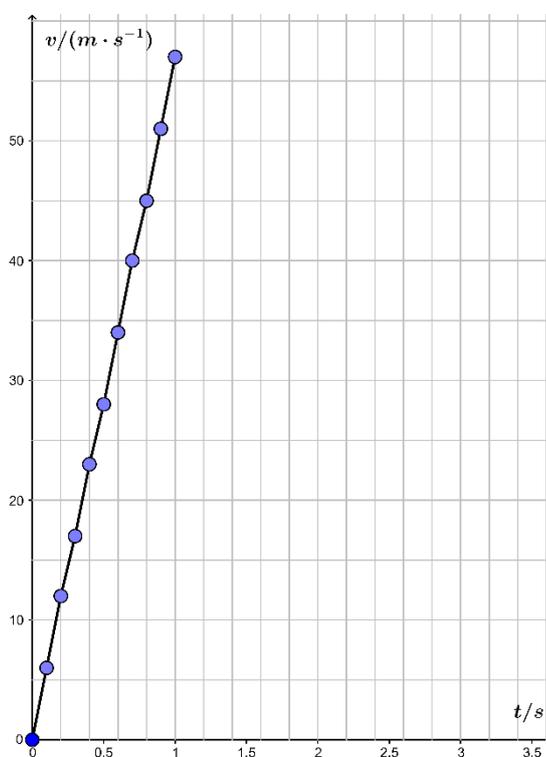
**Zadatak 3.** Nacrtajte grafički prikaz brzina – vrijeme tog gibanja.

Da bi to napravili učenici moraju precrtati tablicu te je nadopuniti retkom:  $v$  ( $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ), Tablica 5.5.

Brzinu izračunavaju prema izrazu  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$t/\text{s}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
$s/\text{cm}$	0	0,6	1,8	3,5	5,8	8,6	12	16	20,5	25,6	31,3	37,6	44,5	52
$v/(\text{cm}\cdot\text{s}^{-1})$	0	6	12	17	23	28	34	40	45	51	57	63	69	75

Tablica 5.5. Brzina gibanja kolica



Slika 5.2. v-t grafički prikaz

**Zadatak 4.** Prepoznati ovisnost prikazanih veličina.

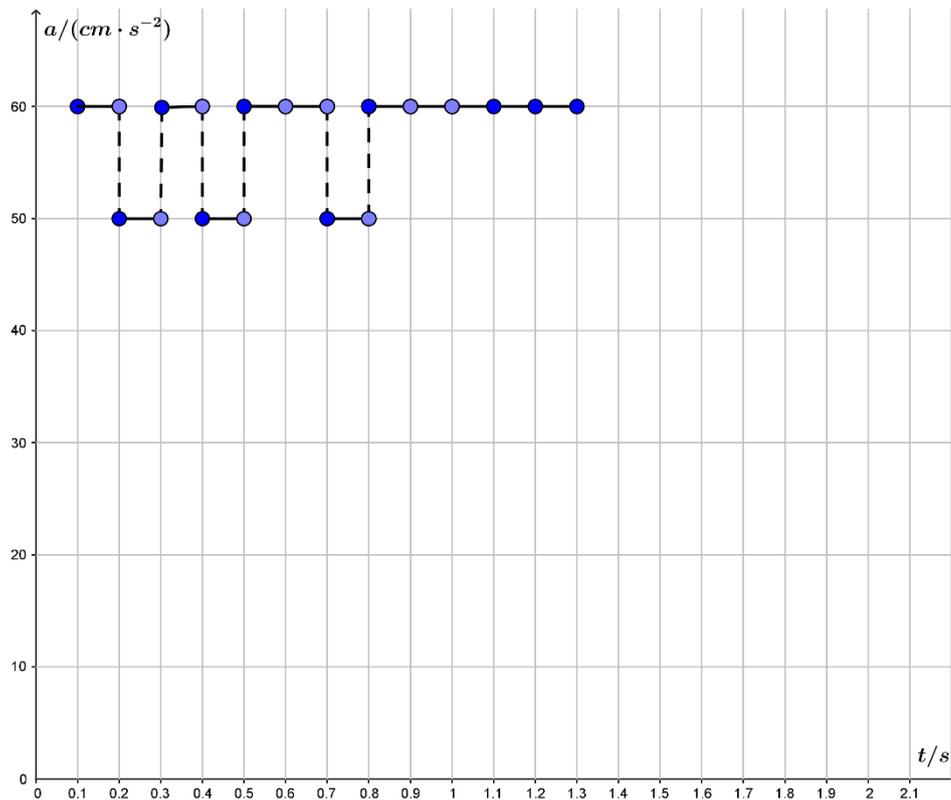
U razgovoru s nastavnikom učenici trebaju doći do zaključka kako treba izgledati grafički prikaz ovisnosti izmjerenih veličina, odnosno da se radi o pravcu. Nakon toga bi trebali zaključiti zašto taj pravac prolazi ishodištem koordinatnog sustava i što onda to znači za međusobnu ovisnost mjerenih veličina?

**Zadatak 5.** Nacrtajte grafički prikaz akceleracija – vrijeme toga gibanja.

Tablicu koju smo maloprije nacrtali, nadopunimo još jednim retkom u kojem učenici izračunavaju akceleraciju prema izrazu  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ , Tablica 5.6.

$t/s$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
$s/cm$	0	0,6	1,8	3,5	5,8	8,6	12	16	20,5	25,6	31,3	37,6	44,5	52
$v/(cm \cdot s^{-1})$	0	6	12	17	23	28	34	40	45	51	57	63	69	75
$a/(cm \cdot s^{-2})$		60	60	50	60	50	60	60	50	60	60	60	60	60

Tablica 5.6. Akceleracija kolica



Slika 5.3. a-t grafički prikaz

**Zadatak 6.** Odredite srednju vrijednost, maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pogrešku akceleracije te rezultat zapišite u ispravnom obliku:  $a = (57,69 \pm 7,69) \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $r_m = 13,3 \%$ .

**Zadatak 7.** Odredite nagib pravca na svom prikazu ovisnosti brzine o vremenu i izračunajte iz tog nagiba akceleraciju. Usporedite svoju vrijednost sa srednjom vrijednošću akceleracije koju ste izračunali.

Nagib pravca mogu odrediti uzimajući koordinate dvije točke na  $v$ - $t$  grafu i  $nagib = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ , gdje prva odabrana točka ima koordinate  $(t_1, v_1)$ , druga  $(t_2, v_2)$ .

**Primjer 2.** Analiziranjem tragova tipkala na traci prijeđeni put kolica za određeno vrijeme prikazan je u tablici 5.7.

$t/s$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$s/cm$	0	2,2	4,6	7,2	10	13	16,2	19,6	23,3	27,1	31,1

Tablica 5.7. Put kolica

**Zadatak 8.** Na milimetarskom papiru nacrtajte  $s$ - $t$  grafički prikaz ovoga gibanja.

**Zadatak 9.** Nacrtajte grafički prikaz brzina – vrijeme tog gibanja.

**Zadatak 10.** Opišite ovisnost prikazanih veličina.

**Zadatak 11.** Nacrtajte grafički prikaz akceleracija – vrijeme tog gibanja.

**Zadatak 12.** Odredite srednju vrijednost, maksimalnu apsolutnu i maksimalnu relativnu pogrešku akceleracije te rezultat zapišite u ispravnom obliku.  $a = (20 \pm 10) \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $r_m = 50 \%$ .

**Zadatak 13.** Odredite nagib pravca na svom grafičkom prikazu i izračunajte iz tog nagiba akceleraciju. Usporedite svoju vrijednost sa srednjom vrijednošću akceleracije koju ste izračunali.

#### **PREPORUKA:**

1) Učenici bi trebali sami izvršiti zadatke iz primjera 1. uz malu pomoć nastavnika, nakon završenih svih zadataka provesti zajedničku analizu i povezivanje pojmova.

2) Nakon toga učenicima prepustiti da naprave primjer 2. gdje bi trebali uočiti da sada kolica ne kreću iz mirovanja, nego imaju početnu brzinu.

**ZAKLJUČAK:** Zbog stalne sile tijelo se giba stalnom akceleracijom (jednoliku ubrzano), brzina je proporcionalna s vremenom,  $v$ - $t$  grafički prikaz jest pravac čiji koeficijent smjera odgovara akceleraciji tijela.

**NAPOMENA:** Nakon završenih svih vježbi iste primjere prikazat ćemo uz pomoć GeoGebre, njezinih mogućnosti prikazivanja grafa i određivanja funkcije koja najbolje odgovara pripadajućem grafu.

### **5.3. Elastična sila i određivanje konstante elastičnosti opruge**

Međudjelovanje okoline i tijela (sila) može uzrokovati promjenu stanja gibanja i to nazivamo *dinamičko djelovanje*. Često sila ne mijenja stanje gibanja, nego samo oblik. To je *statičko djelovanje*.

Postoji sila kojom se tijelo opire promjeni oblika te s prestankom vanjskog međudjelovanja vraća tijelo u početni oblik. Tu silu nazivamo *elastična sila*.

Promjenu oblika tijela nazivamo *deformacija*. Razlikujemo elastičnu deformaciju i plastičnu deformaciju. Elastična deformacija takva je deformacija pri kojoj se tijelo prestankom međudjelovanja s okolinom vraća u prvobitni oblik, dok kod plastične deformacije ostaje deformirano.

Elastičnu silu najčešće uočavamo na opruzi ili gumi.

**Robert Hooke** (1635. – 1703.) prvi je opisao povezanost između produljenja i sile koja uzrokuje to produljenje te algebarski zapis koji pokazuje tu vezu nazivamo *Hookeovim zakonom*, koji nam je za oprugu poznat u obliku:  $F_e = -k \Delta l$  (orijentacija sile suprotna je produljenju, zato „-“).

Želimo utvrditi povezanost između *elastične sile* ( $F_e$ ), *produljenja*  $\Delta l$  ( $\Delta x$ ) i *koeficijenta elastičnosti tijela* ( $k$ ) koji predstavlja posljedicu unutrašnje strukture materijala.

**Eksperiment:** (Ako smo ga u mogućnosti napraviti).

Na elastičnu oprugu stavljamo utege različitih masa te mjerimo njenu duljinu. Rezultate mjerenja prikazujemo tablično.

**Primjer 1.** Mjerenjem su dobiveni sljedeći podatci:

Masa utega	Duljina opruge				
	$m/g$	$x_1/cm$	$x_2/cm$	$x_3/cm$	$x_4/cm$
0	10	10	9,9	10	9,8
50	12	11,9	12,1	11,9	12
100	13,9	14,1	14	13,9	14,2
150	16,1	15,9	15,8	16	15,9
200	18,1	18,2	18,2	18,3	18
250	19,8	20,1	20,2	20,2	19,9

Tablica 5.7. Produljenje opruge 1

**Zadatak 1.** Odredite srednju vrijednost duljine opruge za svaku pojedinu masu te apsolutnu pogrešku.

$l_i$  predstavlja srednju vrijednost duljine opruge za  $i$  – to mjerenje.

$$l_1 = (9,9 \pm 0,1) \text{ cm}; \quad l_2 = (12 \pm 0,1) \text{ cm}; \quad l_3 = (14 \pm 0,2) \text{ cm};$$

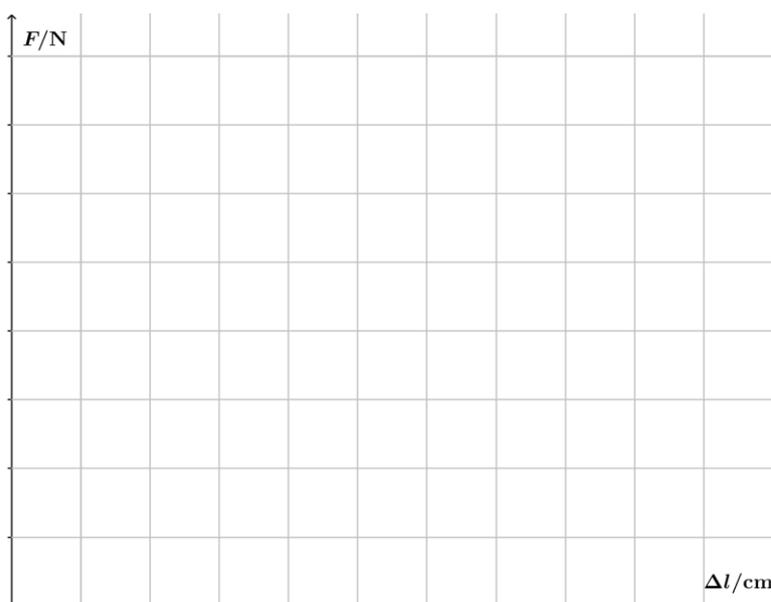
$$l_4 = (15,9 \pm 0,2) \text{ cm}; \quad l_5 = (18,2 \pm 0,2) \text{ cm}; \quad l_5 = (20 \pm 0,2) \text{ cm};$$

**Zadatak 2.** Izračunajte srednje produljenje opruge za svaku pojedinu silu te napravite grafički prikaz sila – produljenje. (Za izračunavanje sile koristiti vrijednost  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ )

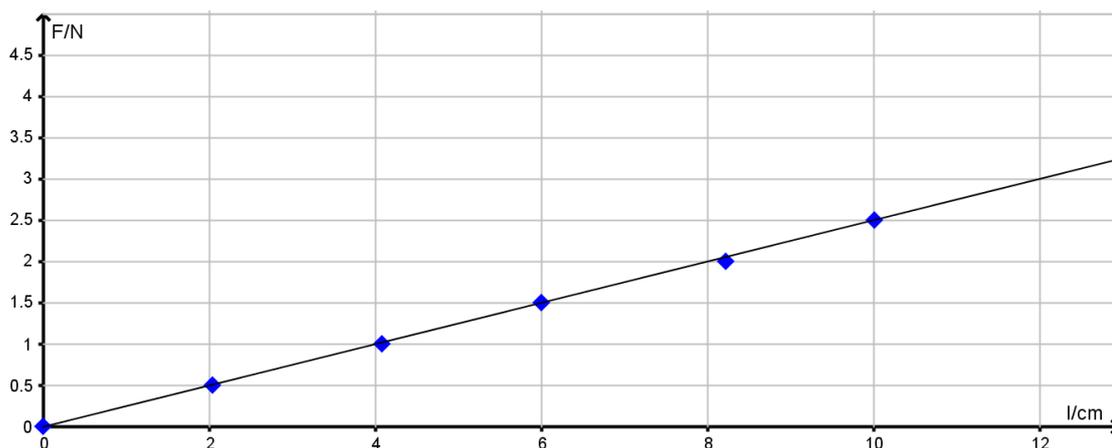
$$\Delta l_i = l_i - l_1; \quad F = mg$$

F/N	$\Delta l/cm$
0	0
0,5	2,04
1	4,08
1,5	6
2	8,22
2,5	10,01

Tablica 5.8. Srednje produljenje



Grafički prikaz 5.1. Ovisnost sile o produljenju



Slika 5.4. Ovisnost sile o produljenju

**Zadatak 3.** Kakva je ovisnost sile o produljenju opruge?

Možete li iz grafičkog prikaza odrediti kolika sila uzrokuje produljenje od 15 cm i koliko će biti produljenje ako je uzrokovano silom od 4 N?

Učenici trebaju prepoznati da se radi o linearnoj ovisnosti (proporcionalnosti između veličina).

**Zadatak 4.** Iz poznatih vrijednosti sile i produljenja opruge odredite njezinu konstantu  $k$  (konstantu elastičnosti).

F/N	$\Delta l$ /cm	$k$ /N · m <sup>-1</sup>
0	0	
0,5	2,04	0,2451
1	4,08	0,2451
1,5	6	0,25
2	8,22	0,2433
2,5	10,01	0,2498

Tablica 5.9. Konstanta elastičnosti

$$F_e = -k \Delta l \quad k = (0,2467 \pm 0,0034) \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

**Zadatak 5.** Odredite koeficijent elastičnosti opruge pomoću grafičkog prikaza 5.1.

Učenici bi trebali uočiti da trebaju odrediti koeficijent smjera pravca koji pokazuje linearnu ovisnost između sile i produljenja opruge.

Koeficijent smjera ili nagib pravca mogu odrediti uzimajući koordinate dvije točke na  $F - \Delta l$  grafu i *nagib* =  $\frac{F_2 - F_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1}$ , gdje prva odabrana točka ima koordinate  $(F_1, \Delta l_1)$ , druga  $(F_2, \Delta l_2)$ .

**Primjer 2.** Mjerenjem duljine druge opruge dobili smo sljedeće podatke.

Masa utega	Duljina opruge				
m/g	$x_1/cm$	$x_2/cm$	$x_3/cm$	$x_4/cm$	$x_5/cm$
0	8	8,1	8	7,9	8
50	12,1	12,3	12,1	12	12,2
75	14,2	14	14,1	13,9	14,3
150	20,2	20,1	20,3	20,2	20,1
250	28,5	28,7	28,5	28,8	28,6

Tablica 5.10. Produljenje opruge 2

**Zadatak 6.** Napravite grafički prikaz sila – produljenje.

**Zadatak 7.** Odredite konstantu elastičnosti opruge s grafičkog prikaza u zadatku 6.

**Zadatak 8.** Odredite konstantu elastičnosti opruge računskim putem.

Koliko se rezultati dobiveni računskim i grafičkim načinom razlikuju?

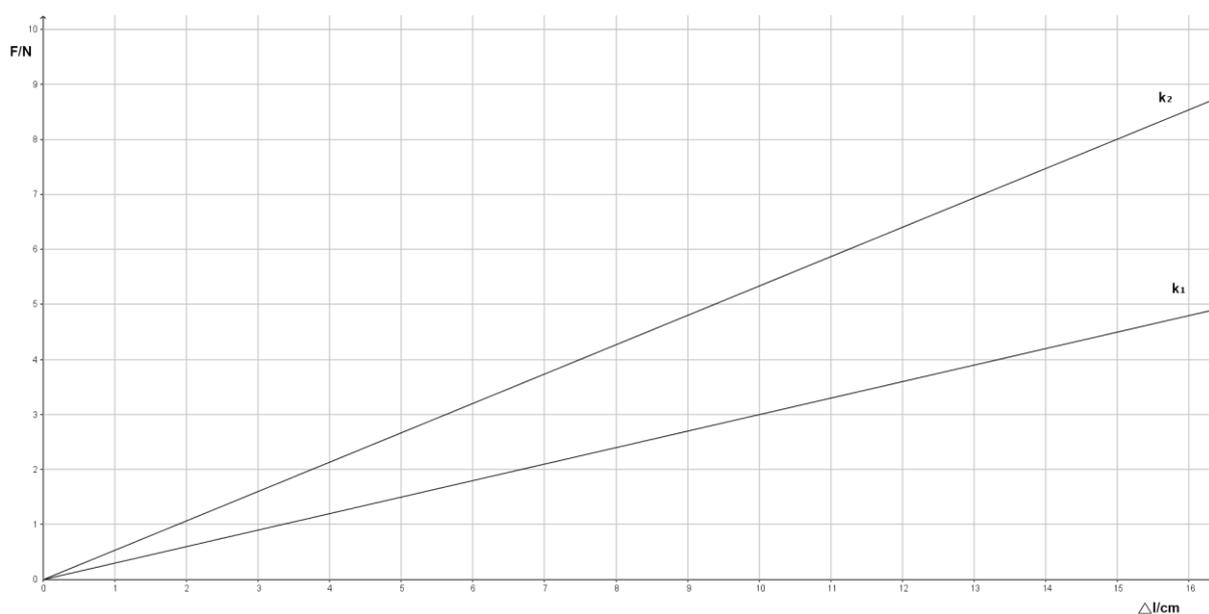
**Zadatak 9.** Usporedite izgled grafa iz primjera 1. i primjera 2. Što možete zaključiti iz tih grafova?

Učenicima pomoći da dođu do zaključka da veća vrijednost konstante elastičnosti znači strmiji graf te pokušati na temelju toga zaključiti nešto o svojstvima opruge koju koristimo u primjerima (obično se tanje i dulje opruge lakše rastežu, zato imaju malu konstantu elastičnosti, dok se deblje (izrađene od materijala veće debljine) teže rastežu i one imaju veliki  $k$ ).

**Primjer 3:** Na osnovi grafičkog prikaza sila – produljenje odredite konstante elastičnosti opruga.

Očitavajući vrijednosti koordinata točaka s grafa dolazimo do rezultata:

$$k_1 = 0,3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, \quad k_2 = 0,53 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$



Slika 5.5. Određivanje koeficijenta elastičnosti

## 5.4. Period jednostavnog njihala

Jednostavno (matematičko) njihalo sastavljeno je od nerastezljive niti i kuglice male mase koja je obješena na tu nit i predstavlja primjer jedne vrste gibanja koju nazivamo *harmonijsko titranje*.

Harmonijsko titranje periodično je gibanje pod utjecajem elastične sile.

Periodično gibanje jest gibanje koje se ponavlja nakon određenog vremenskog intervala. Periodično gibanje po dijelu krivulje oko nekog položaja nazivamo *titranje*.

*Period (T)* vremenski je interval nakon kojeg se gibanje ponavlja. Uz period vežemo *frekvenciju (f)* koja je definirana kao broj ponavljanja u jedinici vremena ili recipročna vrijednost perioda.

$$f = \frac{1}{T}$$

Naš je zadatak da istražimo ovisnost osnovnih veličina koje su karakteristične za jednostavno njihalo, a to su: period ( $T$ ), duljina njihala ( $l$ ), masa obješenog tijela ( $m$ ) i kut ( $\theta$ ) za koji otklonimo njihalo iz položaja u kojem miruje (iz ravnoteže).

**PREPORUKA:** Ako je moguće napraviti eksperiment te provesti mjerenja, a ako nij, možemo se koristiti rezultatima već ranije učinjenog mjerenja.

**PRIBOR:** nit konca duga barem 1 m, nosač za njihalo, kuglica, mjerna vrpca, zaporni sat (mobitel) i kutomjer.

**Zadatak 1.** Istražite kako period  $T$  ovisi o amplitudi, odnosno o kutu  $\theta$  za danu masu njihala. Odredite srednju vrijednost i apsolutnu pogrešku pri mjerenju perioda. Ovisnost  $T - \theta$  prikažite grafički na milimetarskom papiru .

$$m = 40 \text{ g}$$

$$l_0 = 54 \text{ cm}$$

$$N = 5$$

$$T = \frac{t}{N}$$

$\theta / ^\circ$	$t / \text{s}$	$T / \text{s}$
50	7,46	1,492
40	7,59	1,518
30	7,53	1,506
45	7,64	1,528
20	7,52	1,504
10	7,54	1,508

Tablica 5.11. Ovisnost perioda o kutu

### Napomena:

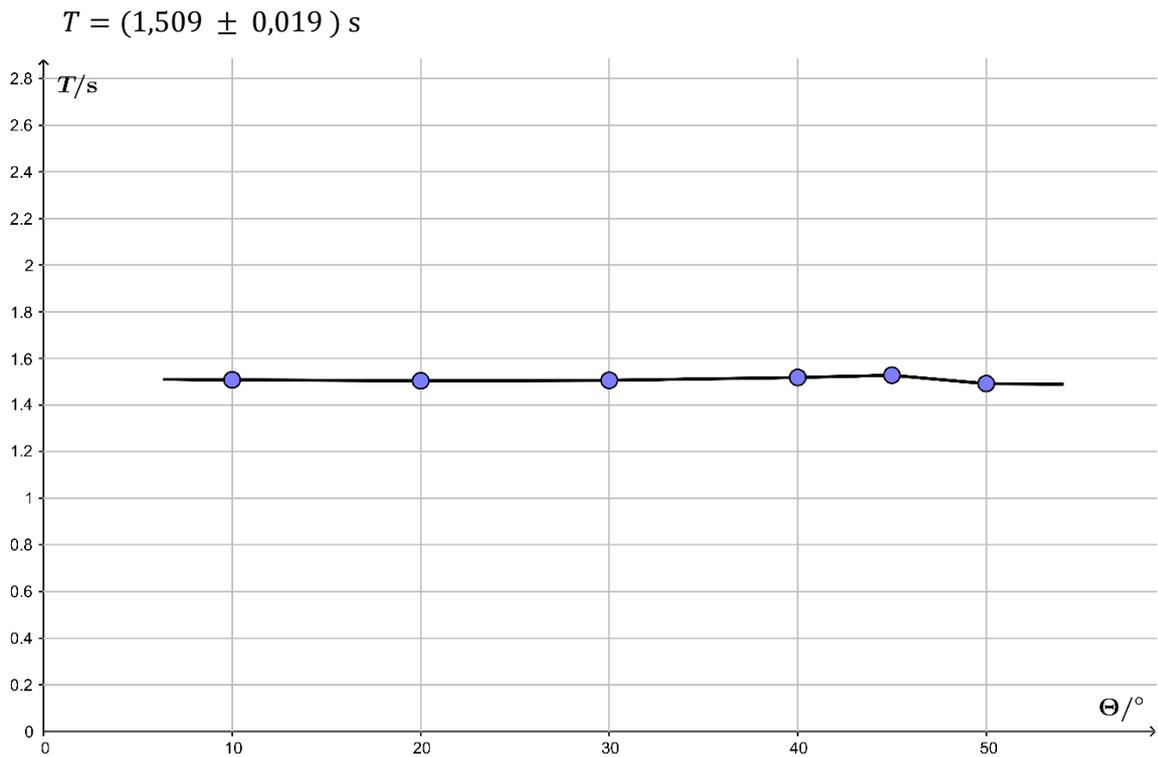
Masa je kuglice stalna tijekom cijele vježbe i treba pored tablice zapisati koliko ona iznosi.

Pored tablice treba zapisati i broj titranja koji je mjeren te kolika je duljina niti.

Iz rezultata je vidljivo da period njihala ne ovisi o kutu otklona, što nam u grafičkom prikazu ovisnosti perioda o amplitudi daje pravac koji je paralelan s koordinatnom osi kuta  $\theta$ .



Slika 5.6. Njihalo



Slika 5.7. Ovisnost perioda o kutu otklona

**Zadatak 2.** Kako period  $T$  ovisi o masi  $m$  njihala za danu duljinu  $l$ ? Prikažite tu ovisnost grafički.

$$N = 5$$

$$\theta = 40^\circ$$

$$l = 0,565 \text{ m}$$

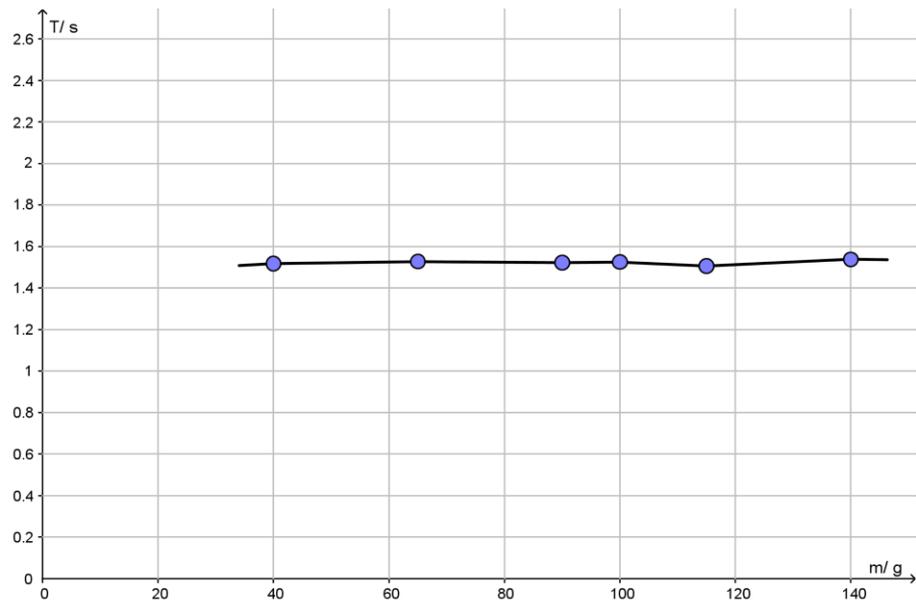
$m/\text{g}$	$t/\text{s}$	$T/\text{s}$
40	7,59	1,518
65	7,64	1,528
90	7,61	1,522
115	7,53	1,506
140	7,69	1,538
100	7,63	1,526

Tablica 5.12. Ovisnost perioda o masi

**Napomena:** Uz broj titraja pored tablice treba upisati amplitudu (kut), koja (koji) za sve mase mora biti jednaka (isti) te kolika je duljina niti korištena u ovom dijelu vježbe.

I kod ovoga zadatka vidi se da period nije ovisan o masi, kao ni o amplitudi pa možemo odrediti srednju vrijednost perioda.

$$T = (1,523 \pm 0,017) \text{ s}$$



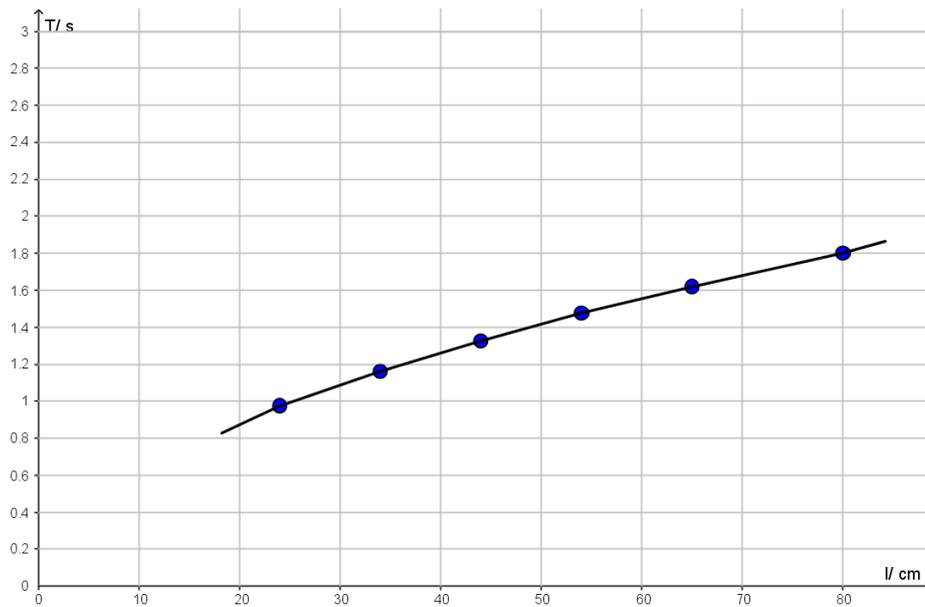
Slika 5.8. Ovisnost perioda o masi tijela na niti

**Zadatak 3.** Istražite kako period  $T$  ovisi o duljini njihala  $l$  za danu masu njihala. Na milimetarskom papiru nacrtajte ovisnost  $T - l$ , a zatim i ovisnost  $T^2 - l$  i ovisnost  $T - \sqrt{l}$ .

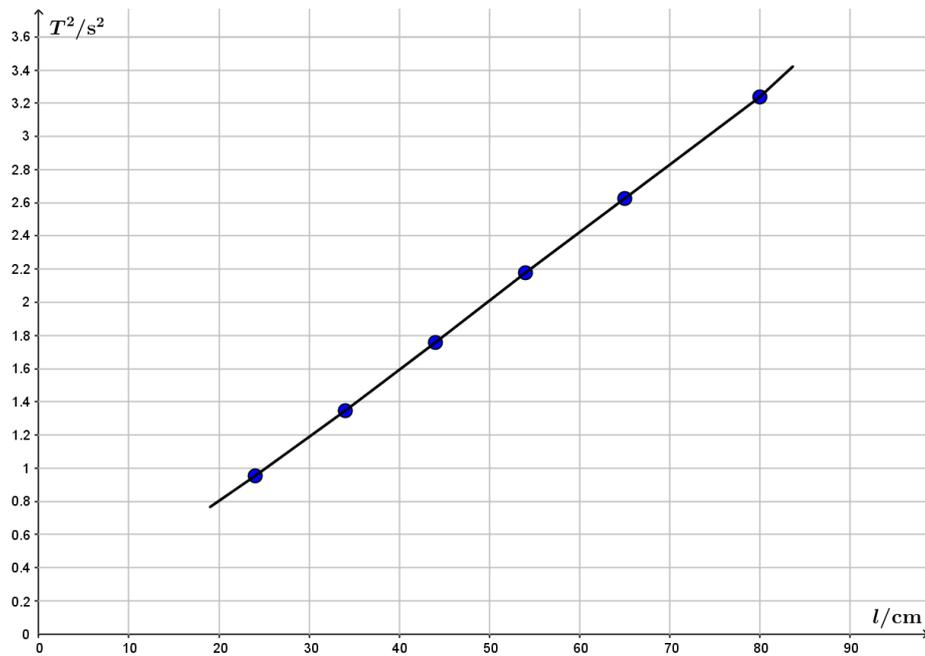
	$l/\text{cm}$	$t/\text{s}$	$T/\text{s}$	$T^2/\text{s}^2$
$m = 40 \text{ g}$	54	7,38	1,476	2,179
$\theta = 40^\circ$	44	6,63	1,326	1,758
$N = 5$	34	5,8	1,16	1,346
	24	4,88	0,976	0,953
	65	8,1	1,62	2,624
	80	9	1,8	3,24

Tablica 5.13. Ovisnost perioda o duljini niti

**Napomena:** Masa je kuglice stalna tijekom cijele vježbe i treba pored tablice zapisati koliko ona iznosi. Pored tablice treba zapisati i broj titranja koji je mjereno te kolika je amplituda.



Slika 5.9. Ovisnost perioda o duljini niti

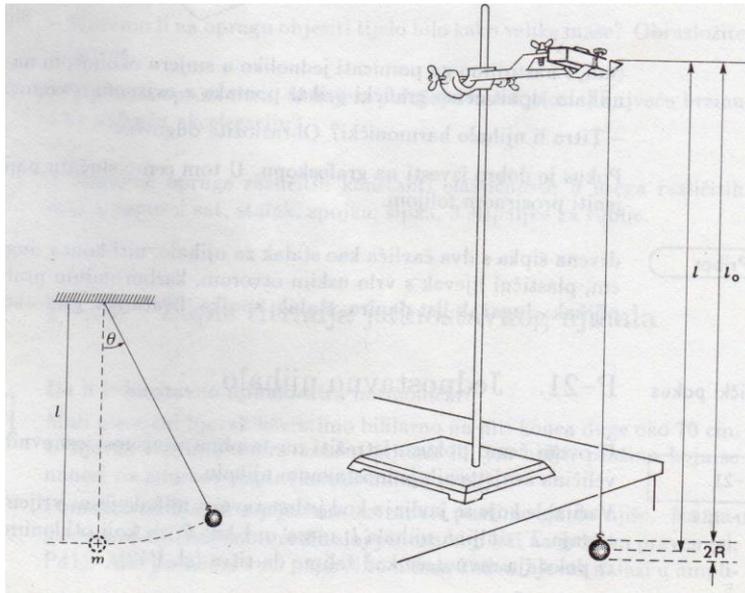


Slika 5.10. Ovisnost kvadrata perioda o duljini

**Zadatak 4.** Istražite o kojim veličinama ovisi period jednostavnog njihala. Možete li napisati algebarski izraz za period?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Učenicima će biti teže napisati izraz jer nismo ispitivali ovisnost o ubrzanju slobodnog pada, ali već na temelju ovoga mogu zaključiti da period ne ovisi o amplitudi titranja, o masi koja je obješena na nerastezljivu nit, nego o duljini. GeoGebra će omogućiti bolje uočavanje veza između veličina.



Napomena: Duljina njihala  $l$  sastoji se od duljine konca  $l_0$  i polumjera kuglice  $r$  koji možete odrediti.

Slika 5.11. Uputa za eksperiment

## 5.5. Električni otpor

Kada vodič uključimo na izvor napona, njime proteče električna struja, a prolaskom struje kroz vodič javlja se i električni otpor. On nastaje zbog sudara slobodnih elektrona ili nositelja naboja u vodiču s atomima kristalne rešetke pa zbog toga možemo reći da je električni otpor fizička veličina koja karakterizira prolaz električne struje kroz neki vodič.

Fizička oznaka za električni otpor jest  $R$ , a mjerna je jedinica  $\Omega$ .

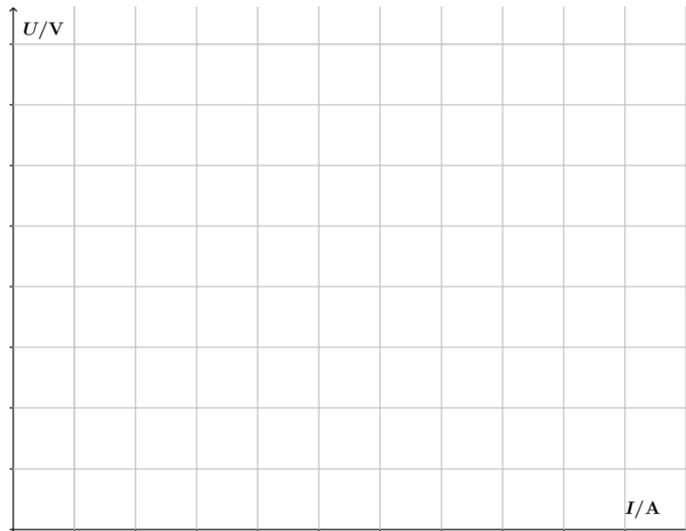
Električni otpor vodiča jest stalna vrijednost te ga možemo odrediti mjereći električni napon  $U$  na krajevima vodiča i električne struje  $I$  u tom strujnom krugu.

**Primjer 1.** Mjerenjem su dobiveni podatci prikazani u tablici 5.14.

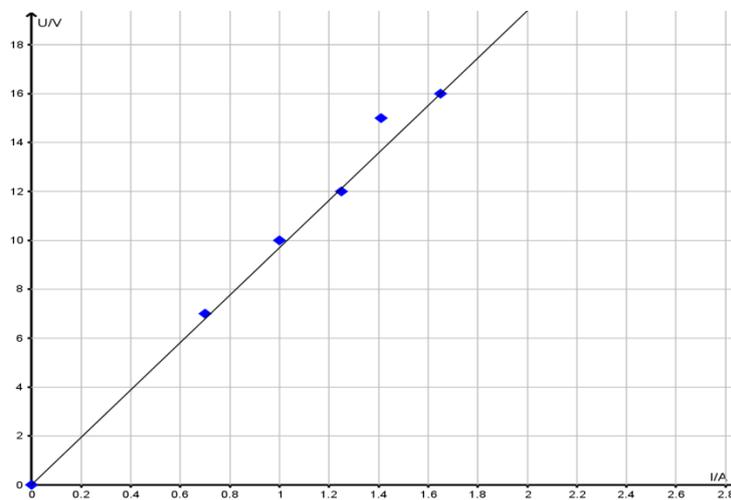
$U/V$	7	10	12	15	16
$I/A$	0,70	1,00	1,25	1,41	1,65

Tablica 5.14. Vodič 1

**Zadatak 1.** Vrijednosti električnog napona ( $U$ ) i električne struje ( $I$ ) iz tablice 5.15. ucrtajte u grafički prikaz 1. Objasnite kakva je ovisnost između električnog napona i električne struje.



Grafički prikaz 5.2. Prikaz ovisnosti električnog napona o električnoj struji prvog vodiča



Slika 5.12. Ovisnost električnog napona o električnoj struji prvog vodiča

Možemo vidjeti da se radi o proporcionalnosti između električne struje i napona.

**Zadatak 2.** Tablicu nadopunite još jednim retkom u kojem odredite omjer  $\frac{U}{I}$  te izračunajte srednju vrijednost tog omjera.

$U/V$	7	10	12	15	16
$I/A$	0,70	1,00	1,25	1,41	1,65
$\frac{U}{I} / \frac{V}{A}$	10,00	10,00	9,60	9,93	9,70

Tablica 5.15. Omjer  $\frac{U}{I}$

$$\frac{U}{I} = (9,85 \pm 0,25) \frac{V}{A}$$

**Zadatak 3.** Odredite koeficijent smjera pravca koji ste dobili kao rezultat grafičkog prikaza u zadatku 1.

Za nagib pravca dobivamo vrijednost 9,7 što je vrlo blisko vrijednosti omjera  $\frac{U}{I}$  pa možemo izvesti zaključak: Nagib pravca jednak je omjeru  $\frac{U}{I}$  i predstavlja osobinu tog vodiča, električni otpor.

Tako dolazimo do Ohmova zakona za električni strujni krug  $R = \frac{U}{I}$ .

**Primjer 2.** U električni strujni krug, za koji su izmjereni podatci dani u tablici 5.17., uključen je vodič nepoznata otpora.

$U/V$	7	10	12	14	16
$I/A$	0,51	0,75	0,94	1,10	1,34

Tablica 5.16. Vodič 2

**Zadatak 4.** Izračunajte električni otpor tog otpornika za svako mjerenje i podatke zapišite u tablicu. Koliko iznosi srednja vrijednost električnog otpora tog otpornika?

$U/V$	7	10	12	14	16
$I/A$	0,51	0,75	0,94	1,10	1,34
$R/\Omega$	13,73	13,33	12,76	12,73	11,94

Tablica 5.17. Električni otpor drugog vodiča

$$R_2 = (12,90 \pm 0,96) \Omega$$

**Zadatak 5.** Vrijednosti električnog napona i električne struje iz tablice 5.17. ucrtajte u grafički prikaz.

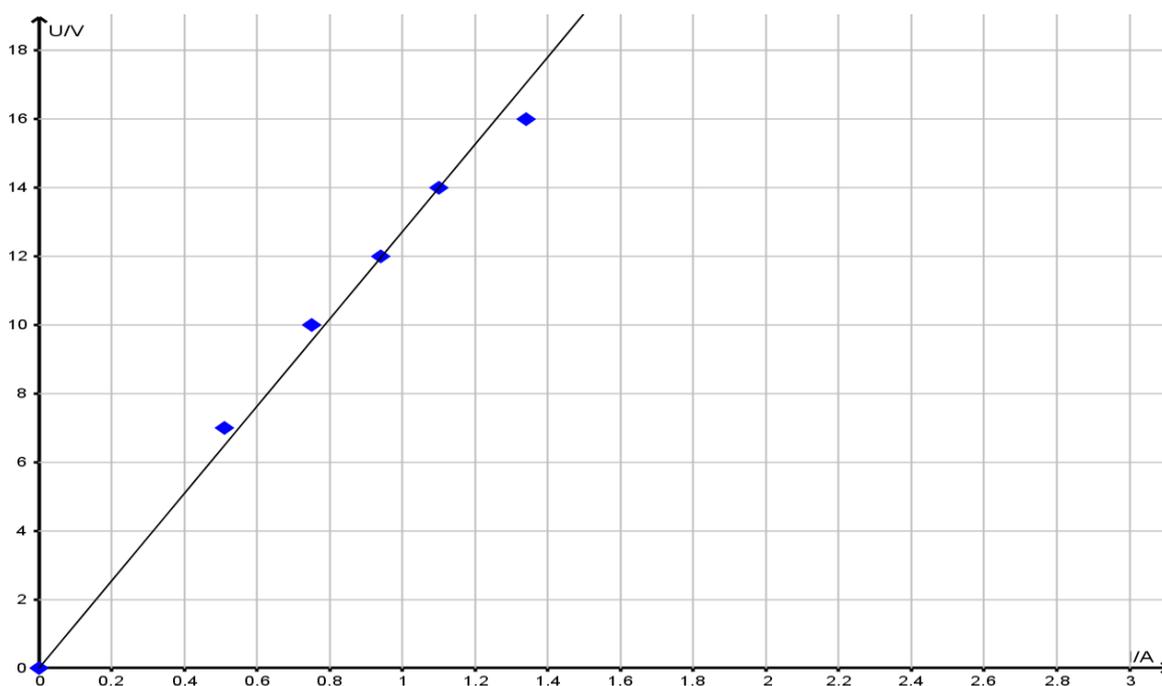
Usporedite ga s grafičkim prikazom u zadatku 1. Što možete iz toga zaključiti?

Možemo primjer 2. i zadatke koji proizlaze iz njega dati učenicima da naprave za domaću zadaću.

Na temelju ova dva grafička prikaza učenici bi trebali doći do zaključka da veći električni otpor vodiča znači slabiju električnu struju uz isti napon.



Grafički prikaz 5.3. Prikaz ovisnosti električnog napona o električnoj struji drugog vodiča



Slika 5.12. Ovisnost električnog napona o električnoj struji za drugi vodič

Električni otpor vodiča  $R$  ovisi o izgledu vodiča, tj. o njegovim geometrijskim osobinama: duljini  $l$  i površini poprečnog presjeka  $S$ , ali ovisi i o vrsti materijala od kojeg je vodič načinjen.

Proučimo sada kako električni otpor ovisi o duljini  $l$ , zatim o poprečnom presjeku  $S$  za danu vrstu materijala.

**Primjer 3.** U električni strujni krug spojen je vodič od željeza presjeka  $7,07 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$ . Podatci se nalaze u tablici 5.18.

$l/\text{m}$	$U/\text{V}$	$I/\text{A}$
0,82	0,15	0,12
0,60	0,09	0,11
0,40	0,05	0,085
0,20	0,025	0,08
0,10	0,011	0,07

Tablica 5.18. Izmjerene vrijednosti za željezo

**Zadatak 6.** Tablicu nadopunite stupcem za otpor i izračunajte ga.

$l/\text{m}$	$U/\text{V}$	$I/\text{A}$	$R/\Omega$
0,82	0,15	0,12	1,25
0,60	0,09	0,11	0,82
0,40	0,05	0,085	0,59
0,20	0,025	0,08	0,31
0,10	0,011	0,07	0,157

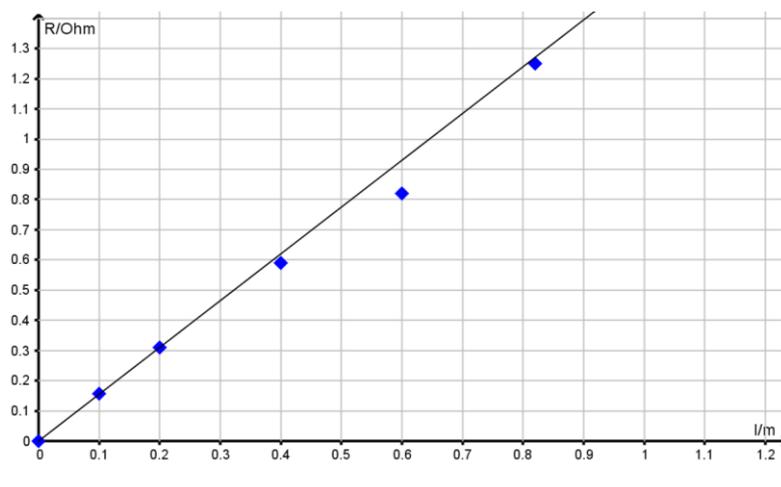
Tablica 5.19.

**Zadatak 7.** Nacrtajte grafički prikaz koji pokazuje ovisnost električnog otpora vodiča o njegovoj duljini. Kako izgleda ta ovisnost?

I ovdje možemo na temelju grafa zaključiti da se radi o linearnoj ovisnosti.



Grafički prikaz 5.4. Ovisnost otpora o duljini vodiča za željezo



Slika 5.13. Ovisnost električnog otpora o duljini vodiča – željezo

**Primjer 4.** U električni strujni krug spojen je vodič od bakra presjeka  $7,07 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$  (isti presjek kao vodič od željeza). Podatci se nalaze u tablici 5.20.

$l/m$	$U/V$	$I/A$
0,82	0,02	0,11
0,60	0,015	0,1
0,40	0,008	0,095
0,20	0,004	0,085
0,10	0,0016	0,07

Tablica 5.20. Podatci za bakar

**Zadatak 8.** Tablicu nadopunite stupcem za električni otpor te ga izračunajte.

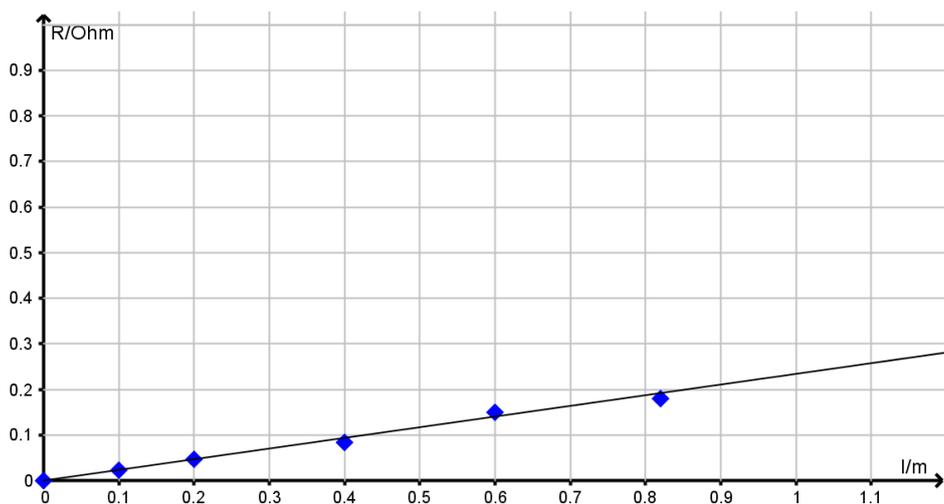
$l/m$	$U/V$	$I/A$	$R/\Omega$
0,82	0,02	0,11	0,18
0,60	0,015	0,1	0,15
0,40	0,008	0,095	0,084
0,20	0,004	0,085	0,047
0,10	0,0016	0,07	0,023

Tablica 5.21. Električni otpor bakra

**Zadatak 9.** Nacrtajte grafički prikaz koji pokazuje ovisnost električnog otpora vodiča o njegovoj duljini. Kako izgleda ta ovisnost?



Grafički prikaz 5.5. Ovisnost otpora o duljini vodiča za bakar



Slika 5.14. Ovisnost električnog otpora o duljini vodiča - bakar

Učenici i ovdje mogu zaključiti da se radi o linearnoj ovisnosti, ali za iste duljine vodiča kao i kog željeza sada je električni otpor manji. Iz toga zaključujemo da otpor vodiča ima povezanost s vrstom materijala.

**Primjer 5.** U električni strujni krug spojen je vodič od bakra duljine 60 cm. Mijenjana je površina poprečnog presjeka vodiča  $S$ . Podatci su u tablici 5.23.

$S/m^2$	$U/V$	$I/A$
$1,018 \cdot 10^{-7}$	0,089	0,80
$2,036 \cdot 10^{-7}$	0,04	0,80
$1,54 \cdot 10^{-6}$	0,008	1,00
$7,07 \cdot 10^{-8}$	0,015	0,1

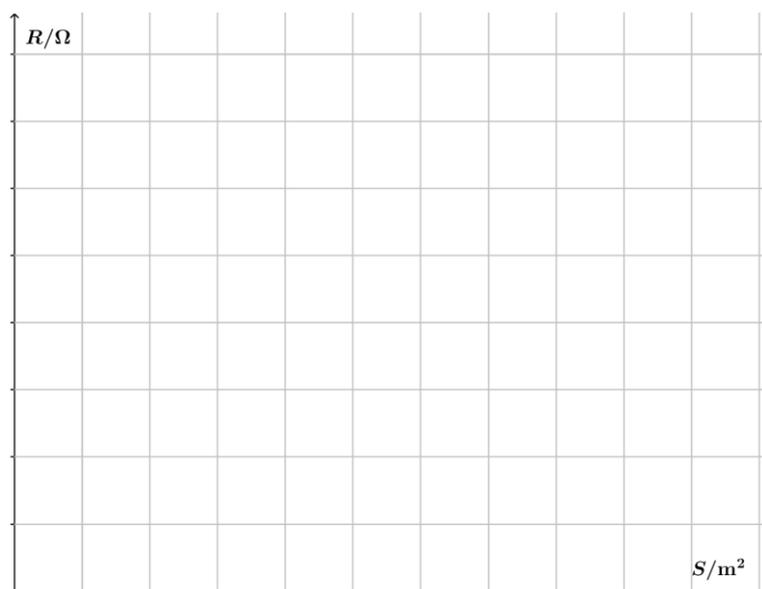
Tablica 5.23. Površina poprečnog presjeka

**Zadatak 10.** Tablicu 5.23. nadopunite stupcem za električni otpor te ga izračunajte.

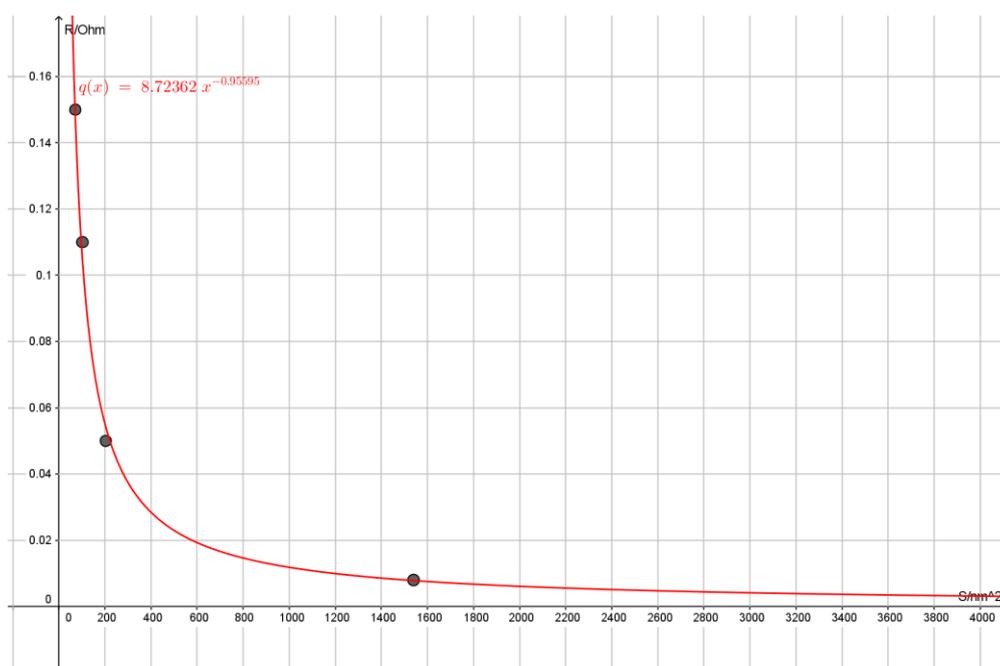
$S/m^2$	$U/V$	$I/A$	$R/\Omega$
$1,018 \cdot 10^{-7}$	0,089	0,80	0,11
$2,036 \cdot 10^{-7}$	0,04	0,80	0,05
$1,54 \cdot 10^{-6}$	0,008	1,00	0,008
$7,07 \cdot 10^{-8}$	0,015	0,1	0,15

Tablica 5.24. Električni otpor

**Zadatak 11.** Nacrtajte graf koji pokazuje ovisnosti električnog otpora vodiča od bakra o površini poprečnog presjeka. Radi li se o linearnoj ovisnosti?



Grafički prikaz 5.6. Ovisnost električnog otpora o površini poprečnog presjeka vodiča za bakar  
Ovdje neće biti linearna ovisnost.

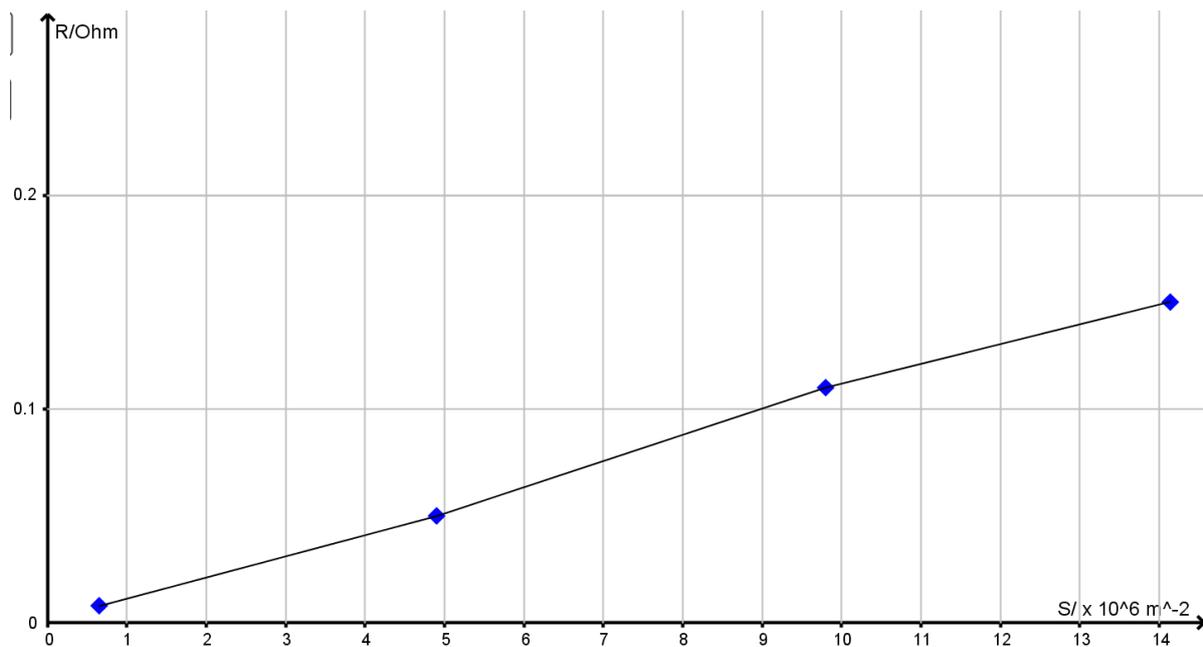


Slika 5.16. Ovisnost otpora o površini poprečnog presjeka

**Zadatak 12.** Koristeći podatke iz tablice 5.24. napravite tablicu u kojoj će biti ovisnost električnog otpora o  $\frac{1}{S}$ , nacrtajte sada grafički prikaz  $R - S^{-1}$ .

$R/\Omega$	0,008	0,05	0,11	0,15
$\frac{1}{S} / \text{m}^{-2}$	$0,65 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^6$	$9,8 \cdot 10^6$	$14,14 \cdot 10^6$

Tablica 5.22. Ovisnost električnog otpora o recipročnoj vrijednosti površine poprečnog presjeka



Slika 5.17. Ovisnost električnog otpora o recipročnoj vrijednosti površine poprečnog presjeka

Sada je to proporcionalnost. Na osnovi svega dosada napravljenog možemo zaključiti da je električni otpor vodiča proporcionalan s duljinom i s recipročnom vrijednošću površine poprečnog presjeka vodiča. Javlja se još koeficijent koji ovisi o vrsti materijala od kojeg je vodič napravljen, a to je električna otpornost.

Učenici je mogu izračunati iz tablica 5.19. i 5.21. te provjeriti točnost s tabličnim vrijednostima.

Iz svega sada znamo da je:  $R = \frac{U}{I}$  i  $R = \rho \frac{l}{S}$ , gdje je  $\rho$  električna otpornost.

Učenike koji bi sami htjeli istražiti Ohmov zakon, mogu to napraviti na stranici <http://physics.mef.hr/webpraktikum/strujnikr/Page1.php>.

## 6. VEKTORI U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA

Prijedlog broja sati: 6

ISHODI:

Na kraju učenja i poučavanja fakultativnog predmeta učenik:

- 6.1. Preračunava veličine koje proučava,
- 6.2. Obraduje i prikazuje rezultate mjerenja,
- 6.3. Na temelju prikaza rezultata donosi zaključke,
- 6.4. Koristi se statističkim alatima,
- 6.5. Raspravlja o međuovisnosti fizičkih veličina.

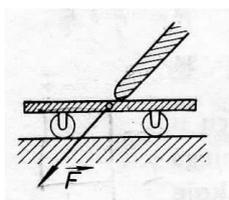
Fizičke veličine dijelimo na skalarne i vektorske veličine. Za skalarne veličine značajno je da su određene svojom vrijednošću i mjernom jedinicom (temperatura, vrijeme, masa... ). Fizičke veličine koje nisu u potpunosti određene svojom vrijednošću i mjernom jedinicom, nego je važan i smjer nazivaju se *vektorske veličine* ili *vektori* (brzina, akceleracija, sila...). Vektor grafički predočavamo usmjerenom dužinom.

Operacije s vektorima, a to su zbrajanje, oduzimanje i množenje razlikuju se od operacija sa skalarima, a u matematici su jasno definirana pravila računanja s vektorima.

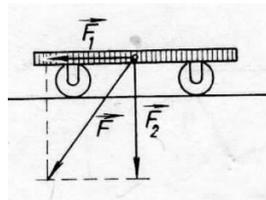
Naš je zadatak da matematička pravila primijenimo na fizičkim veličinama.

### 6.1. Rastavljanje sile na kosini na njezine komponente

Pri gibanju tijela po nekoj površini često susrećemo situaciju da se tijelo ne može gibati u smjeru sile koja uzrokuje to gibanje.

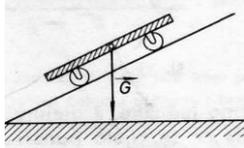


Slika 6.1. Horizontalna podloga

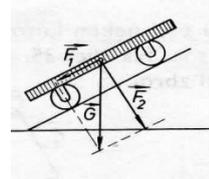


Slika 6.2. Komponente sile

Sila  $\vec{F}$ , koju vidimo na slici 6.1., uzrokuje gibanje u horizontalnom smjeru po površini podloge, ali ujedno i pritišće kolica na podlogu. Slika 6.2. pokazuje nam da silu  $\vec{F}$  možemo rastaviti na komponente u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Sile u horizontalnom  $\vec{F}_1$  i vertikalnom smjeru  $\vec{F}_2$  dobit ćemo pomoću vektorskog zbroja, tako da nam sila  $\vec{F}$  bude rezultanta.



Slika 6.3. Kosina



Slika 6.4. Komponente sile na kosini

Kada su kolica na kosini, njih sila teža  $\vec{G}$  vuče okomito prema dolje (slika 6.3.). Tu se zbog čvrste podloge kolica mogu gibati samo niz kosinu. Sila teža pritišće kolica i na podlogu. Slika 6.4. pokazuje nam da silu težu na kosini možemo rastaviti na dvije komponente  $\vec{F}_1$ , niz kosinu i  $\vec{F}_2$  okomito na kosinu.

Izveli smo pokus kako ga prikazuje slika 6.5. Djelovali smo na kolica silom  $\vec{F}_1$  paralelno s kosinom

sve dok ih nismo uravnotežili, postigli da je  $a = 0$ .

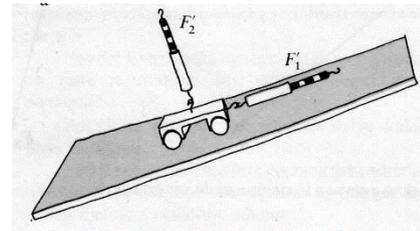
Nakon toga drugim dinamometrom vučemo

kolica okomito prema gore u odnosu na kosinu sve

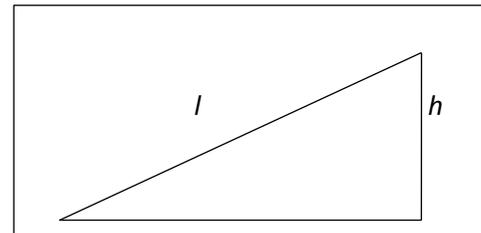
dok ne postignemo da kolica jedva dodiruju podlogu.

Dobivene iznose sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  zabilježili smo u tablicu.

Ovdje je također važno znati duljinu  $l$  i visinu  $h$  kosine.



Slika 6.5. Mjerenje komponentata sile



Slika 6.6. Kosina

Rezultate pokusa možemo vidjeti u tablicama 6.1, 6.2 i 6.3. Svaka tablica odgovara različitim visinama i duljinama kosine.

težina kolica  $G = 7,5 \text{ N}$

duljina kosine  $l = 95 \text{ cm}$

visina kosine  $h = 20 \text{ cm}$

$F_1/\text{N}$	1,6	1,8	1,6	1,8	1,7
$F_2/\text{N}$	7,3	7,4	7,2	7,5	7,1

Tablica 6.1. Prvi nagib kosine

težina kolica  $G = 7,5 \text{ N}$

duljina kosine  $l = 50 \text{ cm}$

visina kosine  $h = 20 \text{ cm}$

$F_1/\text{N}$	2,9	3,2	3,2	3,1	2,8
$F_2/\text{N}$	6,9	7,1	7	7,2	6,8

Tablica 6.2. Drugi nagib kosine

težina kolica  $G = 7,5 \text{ N}$

duljina kosine  $l = 65 \text{ cm}$

visina kosine  $h = 22 \text{ cm}$

$F_1/\text{N}$	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8
$F_2/\text{N}$	7,1	7,3	7	6,9	7,2

Tablica 6.3. Treći nagib kosine

**Zadatak 1.** Izračunajte srednju vrijednost sila  $F_1$  i  $F_2$  za svaku tablicu te apsolutnu pogrešku.

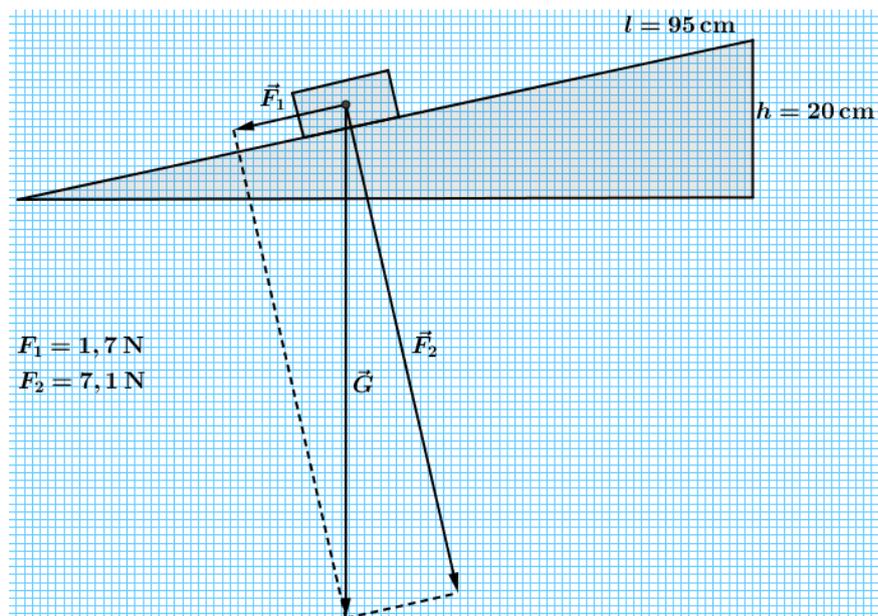
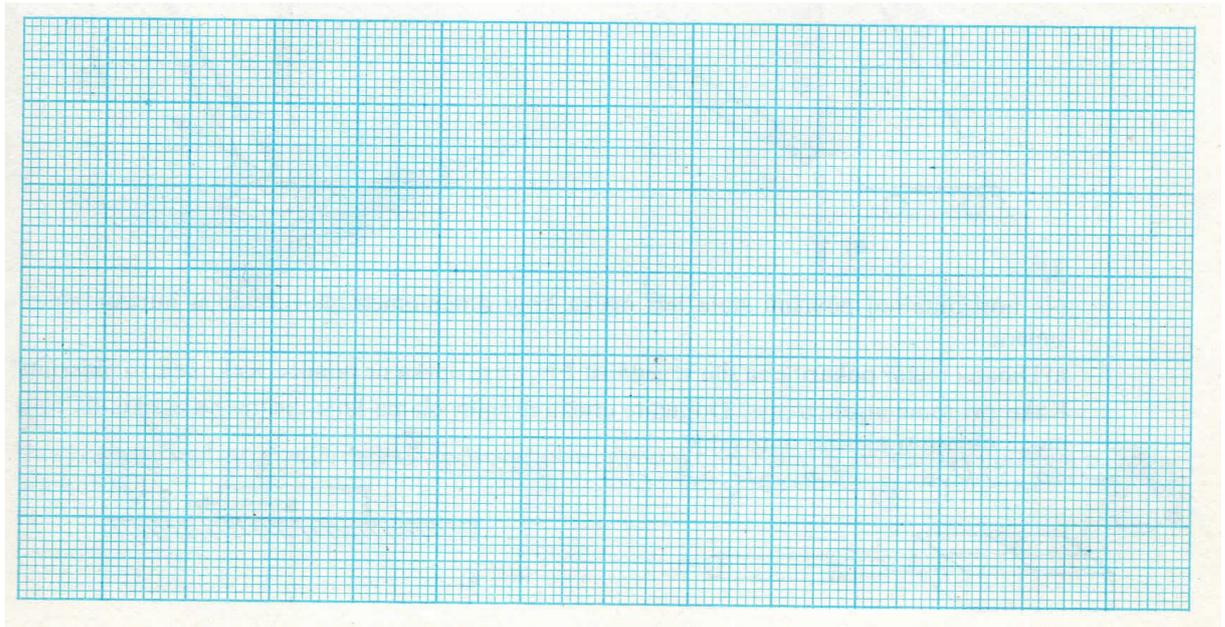
Tablica 1:  $F_1 = (1,7 \pm 0,1) \text{ N}$ ;  $F_2 = (7,3 \pm 0,2) \text{ N}$

Tablica 2:  $F_1 = (3 \pm 0,2) \text{ N}$ ;  $F_2 = (7 \pm 0,2) \text{ N}$

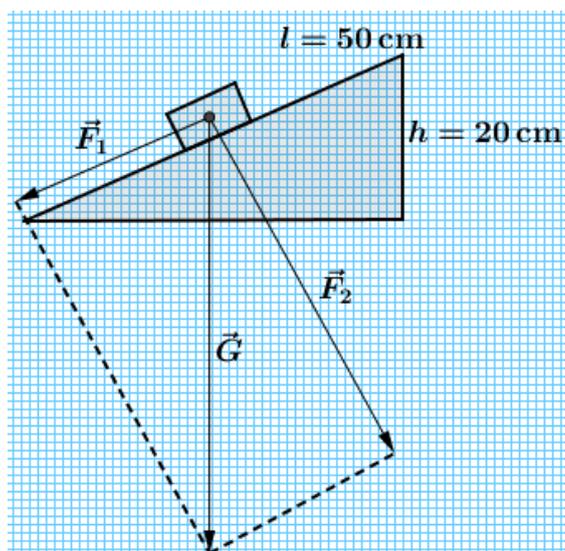
Tablica 3:  $F_1 = (2,6 \pm 0,2) \text{ N}$ ;  $F_2 = (7,1 \pm 0,2) \text{ N}$

**Zadatak 2.** Nacrtajte kosine u umanjenom mjerilu, s jednakim nagibom kao u tablicama 1, 2 i 3.

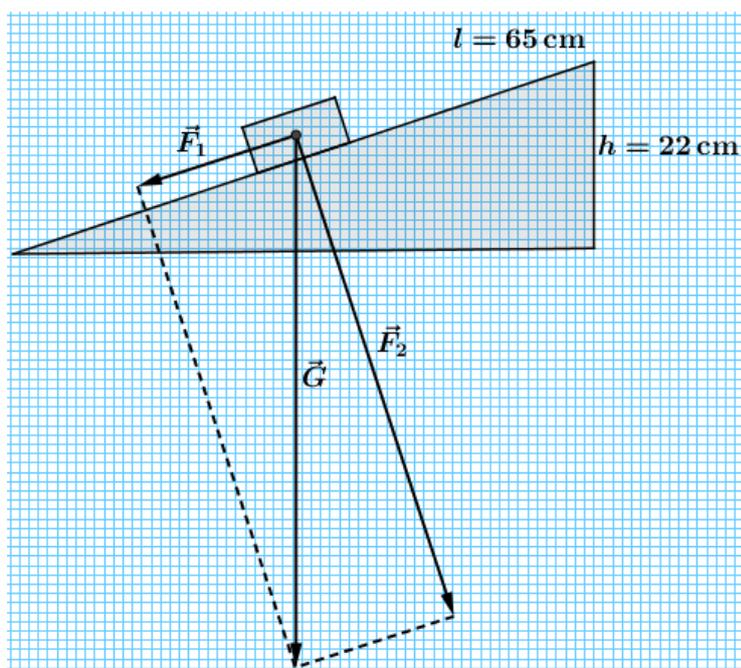
Grafički odredite iznose komponente sile teže  $\vec{G}$ ,  $|\vec{F}_1|$  paralelnu s kosinom i  $|\vec{F}_2|$  okomitu na podlogu kosine.



Slika 6.7. Kosina uz tablicu 6.1.



Slika 6.8. Kosina uz tablicu 6.2.



Slika 6.9. Kosina uz tablicu 6.3.

**Zadatak 3.** Jesu li grafički dobiveni podatci jednaki onima dobivenima pokusom? Zašto?

**Zadatak 4.** Pokušajte računski odrediti iznose komponente sile teže  $\vec{G}$ . Koje područje matematike moramo poznavati ako želimo izračunati  $|\vec{F}_1|$  i  $|\vec{F}_2|$ ?

**Napomena :** Predviđeno je da ovaj fakultativni predmet pohađaju učenici 2. ili 3. razreda pa njima ne bi trebao biti problem povezati ovakvo grafičko prikazivanje s nagibom kosine, tj. s trigonometrijom pa bi učenici mogli i sami zapisati algebarske izraze za  $|\vec{F}_1|$  i  $|\vec{F}_2|$ .

## 6.2. Složena gibanja

Gibanje tijela može biti jednostavno i složeno. Jednostavno gibanje je jednoliko pravocrtno, jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno pravocrtno gibanje. Kada tijelo istodobno izvodi dva ili više jednostavnih gibanja, kažemo da je njegovo gibanje složeno.

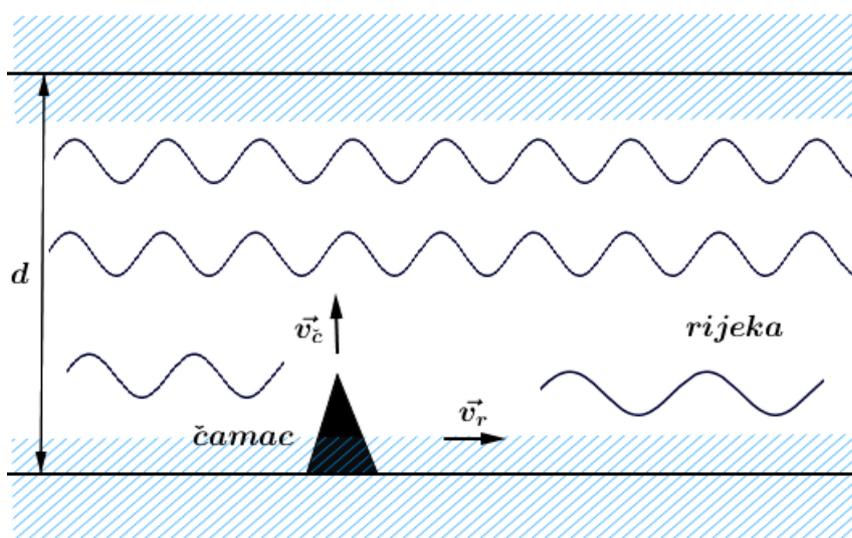
U našoj okolini možemo često uočiti složena gibanja, npr. ako se nalazimo na pokretnim stepenicama koje imaju svoju brzinu gibanja  $v_1$  te mi još počnemo hodati (gibati se) po njima brzinom  $v_2$ , naše gibanje će biti složeno jer se sastoji od dva jednostavna pravocrtna gibanja koja se događaju istodobno i koja su međusobno neovisna.

Kod složenih gibanja važnu ulogu imaju smjerovi brzina kojima se tijela gibaju pa nam ovdje vektori uvelike pomažu u razumijevanju ovakvih gibanja.

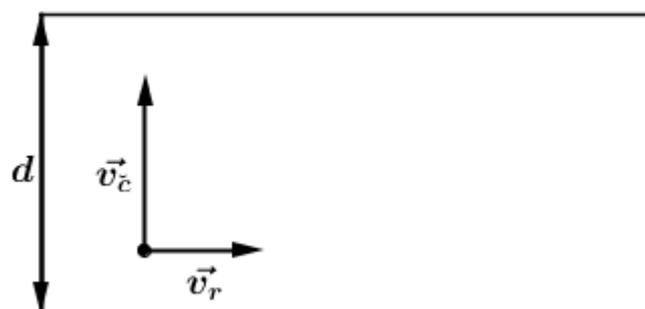
Promotriti ćemo dva primjera: čamac na vodi i horizontalni hitac.

### ČAMAC NA VODI

Čamac plovi okomito na tok rijeke s jedne obale na drugu. Neka je širina rijeke na tom mjestu  $d$ , Slika 1. Kako će se gibati čamac? Hoće li stići na drugu obalu točno nasuprot mjestu s kojeg je krenuo?

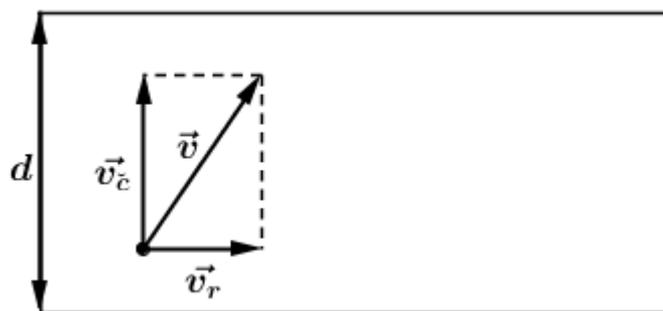


Slika 6.10. Čamac na vodi



Slika 6.11. Brzine rijeke i čamca

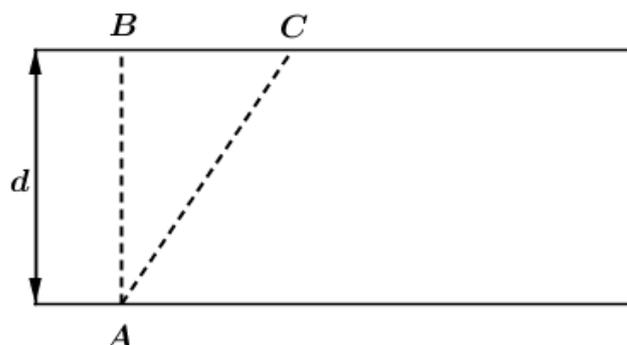
Brzina rijeke i brzina čamca jesu vektorske veličine pa je stvarna (ukupna) brzina čamca jednaka njihovom vektorskom zbroju:  $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_r$ , slika 6.12.



Slika 6.12. Ukupna brzina

U ovom su slučaju brzine čamca i rijeke međusobno okomite te možemo primjenom Pitagorina poučka izračunati  $v = \sqrt{v_c^2 + v_r^2}$ .

Neće stići na drugu obalu na mjesto točno nasuprot, rijeka će ga „odvući“ u svom smjeru (slika 6.13.). Zadavanjem točnih iznosa brzina rijeke i čamca te širine rijeke možemo izračunavati brzinu te vrijeme i udaljenosti mjesta gdje bi stigao čamac da je u mirnoj vodi (nasuprot mjestu polaska i mjesta stvarnog pristajanja čamca).



Slika 6.13. Putanja čamca

Zbog jednolikosti i neovisnosti gibanja možemo izračunati vrijeme koje je potrebno da čamac stigne na drugu obalu:  $t = \frac{d}{v_c}$ , a to je i ukupno vrijeme prelaska čamca na drugu stranu pa poznavajući brzinu rijeke izračunamo udaljenost točaka B i C:  $x = |BC| = v_r \cdot t$ .

Stvarni put čamca  $|AC|$ , možemo ga označiti  $s$ , računajući na dva načina dolazimo do istoga rezultata. Dakle ili  $s = \frac{v}{t}$  ili  $s = \sqrt{d^2 + |BC|^2}$ .

**Zadatak 1.** Rijeka je široka 85 metara, a brzina njezina toka iznosi  $5 \text{ ms}^{-1}$ . Skiper je svoj čamac usmjerio okomito na obalu te se kreće brzinom  $8 \text{ ms}^{-1}$ . Koliko će mu vremena trebati da pređe na suprotnu stranu rijeke, kolika će biti njegova stvarna brzina, koliki će put prijeći i koliko će daleko otići od mjesta na koje bi stigao da se nalazi na jezeru? Zadatak riješiti grafički i računski.

Rješenje:

$$t = 10,625 \text{ s}; v = 9,43 \text{ ms}^{-1}; s = 100,24 \text{ m}; x = 53,13 \text{ m}$$

**Zadatak 2.** Kako promjena brzine toka rijeke utječe na gibanje tijela, na brzinu i prijeđeni put?

Rješenje: Povećanje brzine toka rijeke povećava brzinu gibanja tijela preko rijeke, a to znači ujedno i povećanje prijeđenog puta, ali nema utjecaja na vrijeme putovanja.

**Zadatak 3.** Ima li brzina čamca utjecaja na ukupni prevaljeni put čamca i na vrijeme prelaska na drugu stranu?

Rješenje: Povećanje brzine čamca uzrokuje brži prelazak preko rijeke i skraćuje udaljenost  $x$  na drugoj strani obale.

**Zadatak 4.** Kako odrediti brzinu s obzirom na obalu  $v$  ako brzina rijeke  $v_r$  i  $v_c$  brzina čamca nisu međusobno okomite?

Rješenje: Grafički se može odrediti ili matematički primjenom trigonometrije (sinusov i kosinusov poučak).

NAPOMENA: Ovdje je naveden primjer čamca u vodi. Isto tako možemo uzeti primjer aviona i njegova gibanja dok puše vjetar.

## HORIZONTALNI HITAC

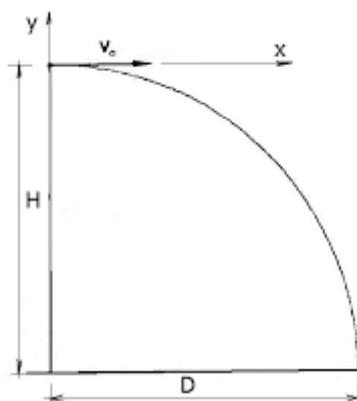
Horizontalni hitac predstavlja primjer još jednog složenog gibanja. On je sastavljen od jednolikog pravocrtnog gibanja u horizontalnom smjeru s neke visine i jednolikog ubranog gibanja (slobodnog pada) u vertikalnom smjeru (slika 6.14). Putanja tijela u horizontalnom hica jest parabola jer je sastavljena od dva gibanja koja su međusobno okomita. Vrijeme trajanja horizontalnog hica isto je kao i vrijeme koliko traje slobodni pad s jednake visine

$$t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$H$  – visina s koje je izbačeno tijelo u horizontalnom smjeru početnom brzinom  $v_0$

$D$  – najveća horizontalna udaljenost koju prevaljuje tijelo prije udara o tlo

$$D = v_0 t_p$$

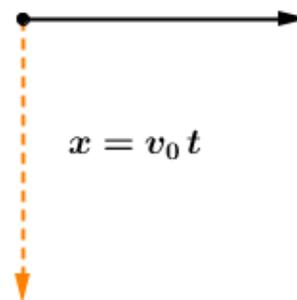


Slika 6.14. Horizontalni hitac

Vrijedi **načelo neovisnosti gibanja**: jednostavna gibanja na koja se mogu rastaviti složena gibanja ne utječu jedno na drugo (neovisna su) i događaju se istovremeno.

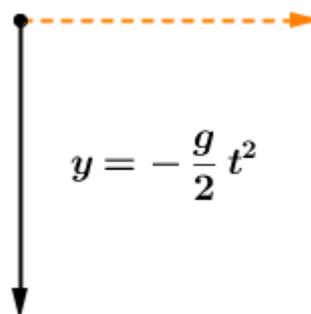
Ako postavimo ishodište koordinatnog sustava u početni položaj tijela, onda nam je zbog načela neovisnosti gibanja moguće odrediti njegov trenutni položaj i to:

- na  $x$ -osi prema zakonu:  $x(t) = v_0 t$  jer je tijelo koje je dobilo početnu brzinu u horizontalnom (vodoravnom) smjeru te se u tom smjeru giba jednoliko po pravcu, slika 6.15.



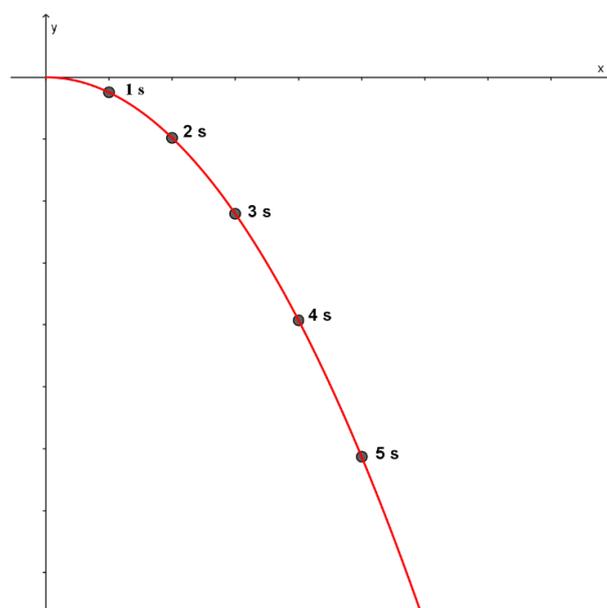
Slika 6.15. Gibanje tijela u horizontalnom smjeru

- na  $y$ -osi prema zakonu:  $y(t) = -\frac{g}{2} t^2$ , to je put koji bi tijelo prešlo slobodno padajući, slika 6.16.



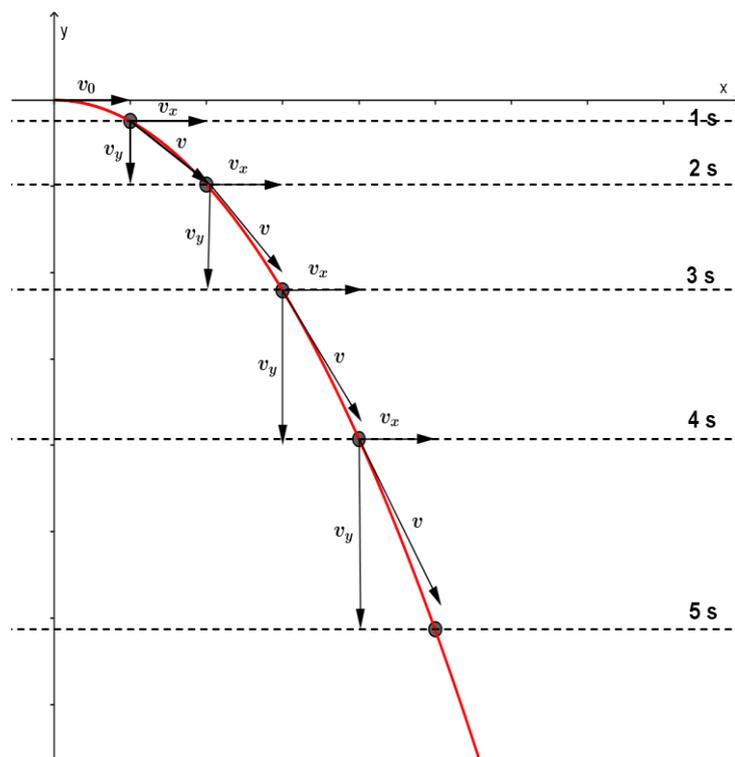
Slika 6.16. Gibanje tijela u vertikalnom smjeru

Možemo ucrtavajući položaj tijela u svakom trenutku kao točku u koordinatnom sustavu dobiti putanju tijela, slika 6.17.



Slika 6.17. Putanja tijela u horizontalnom hicu

Brzina tijela u horizontalnom se smjeru ne mijenja:  $v_x = v_0$ , a u vertikalnom smjeru izračunavamo je prema zakonu:  $v_y = g t$  pa tako iznos trenutačne brzine dobijemo vektorskim zbrajanjem brzina  $v_x$  i  $v_y$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$  ili  $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$ , slika 6.18.



Slika 6.18. Brzina tijela u horizontalnom hicu

**Primjer 1:** Kuglica leti sa stola visokog 125 cm. Pala je na pod 250 cm daleko od ruba stola.

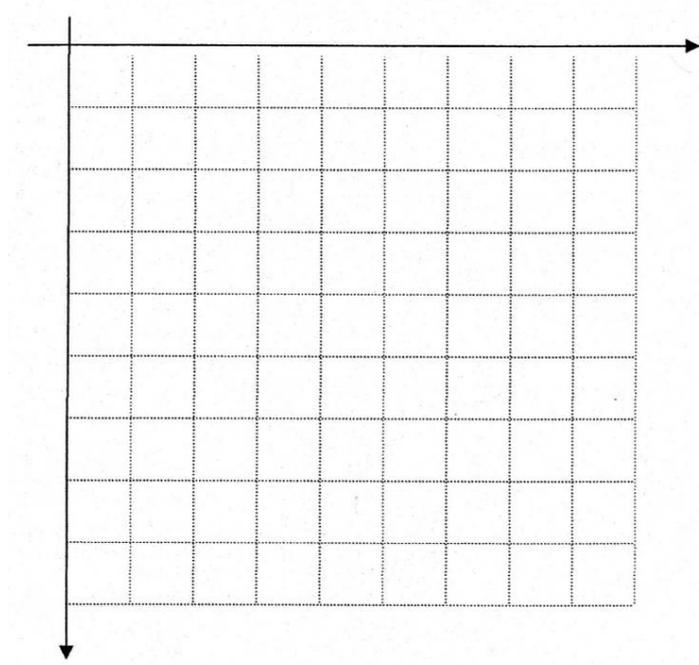
- Kolika je bila njezina brzina u trenutku napuštanja stola?
- Nacrtaj putanju čestice prikazujući njezin položaj za svaku desetinku sekunde.
- Ucrtaj njezine brzine  $v_x$  i  $v_y$ , ukupnu brzinu također za svaku desetinku sekunde.

Rješenje:

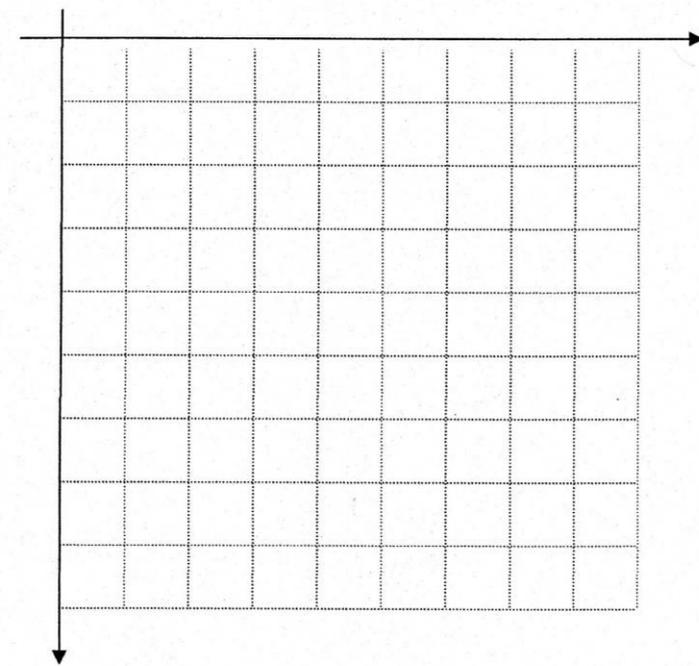
- Visina stola iznosi  $H = 125 \text{ cm} = 1,25 \text{ m}$ ; domet je  $D = 250 \text{ cm} = 2,5 \text{ m}$

iz formule  $t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}$  odredimo vrijeme pada  $t_p = 0,5 \text{ s}$ , a onda dobivamo  $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$ .

- Položaj tijela izračunavamo za svaku desetinku sekunde te ucrtavamo u koordinatni sustav koji izgleda kao slika 6.17.



c) Sada na ucrtani položaj i putanju ucrtavamo vektore brzine, kao slika 6.18.



## 7. LINEARNA FUNKCIJA U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA U GEOGEBRI

### 7.1. Istraživanja gibanja pod utjecajem stalne sile – GeoGebra

Primjere gibanja koje smo analizirali u prvom dijelu ove vježbe, sada analiziramo u programu GeoGebra.

Zadajemo učenicima iste zadatke, ali sada na računalima na kojima je instalirana GeoGebra. Rad u GeoGebri poznat im je iz početnog dijela ovoga fakultativnog predmeta te sada trebaju to primijeniti na rezultate mjerenja.

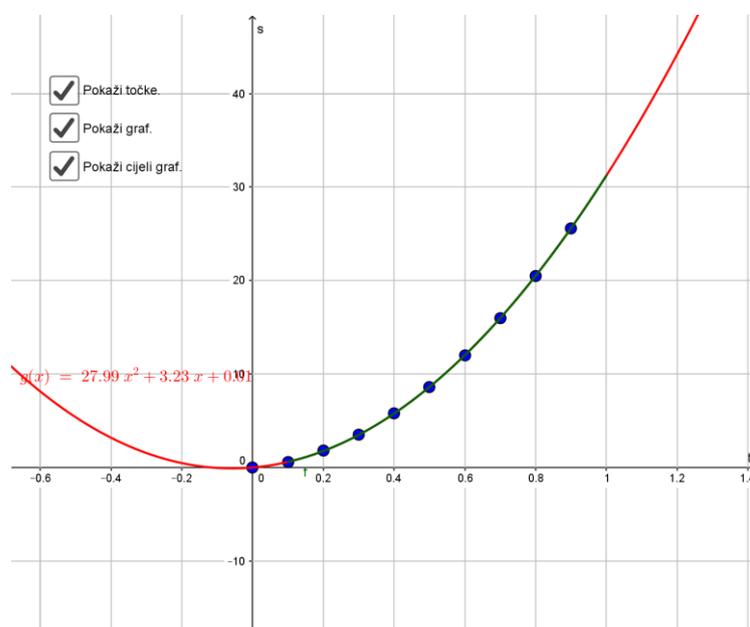
**Primjer 1.** Analiziranjem tragova tipkala na traci prijeđeni put kolica za određeno vrijeme prikazan je u tablici:

$t/s$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
$s/cm$	0	0,6	1,8	3,5	5,8	8,6	12	16	20,5	25,6	31,3	37,6	44,5	52

Tablica 7.1. Put kolica

**Zadatak 1.** Nacrtajte s-t grafički prikaz ovoga gibanja.

S učenicima smo ranije raspravili raspored koordinatnih osi tako da sada mogu samostalno raditi, a naučili su raditi s GeoGebrom te će unijeti podatke iz tablice i nacrtati grafički prikaz. Prvo neka ucrtaju točke, zatim graf, a potom neka nađu funkciju koja opisuje ovo gibanje.



Slika 7.1. Put kolica

**Zadatak 2.** Nacrtajte grafički prikaz brzina–vrijeme tog gibanja.

Da bi to napravili, učenici moraju već napravljenu tablicu nadopuniti retkom:  $v/(cm \cdot s^{-1})$ , a dalje napraviti zadatak isto kao zadatak 1.

**Zadatak 3.** Nacrtajte grafički prikaz akceleracija – vrijeme toga gibanja.

Napravljenu tablicu učenici će sada nadopuniti još retkom  $a/(cm \cdot s^{-2})$ , a nakon toga sve kao i dosada.

Nakon što učenici naprave sva tri grafička prikaza u GeoGebri, možemo s njima razgovarati o linearnoj ovisnosti brzine o akceleraciji.

**Zadatak 4.** Napravite aplet s akceleracijom kao promjenjivom veličinom te proučavajte kako će izgledati  $s-t$  i  $v-t$  grafički prikazi u ovisnosti o promjeni vrijednosti akceleracije.

**Primjer 2.** Analiziranjem tragova tipkala na traci prijedeni put kolica za određeno vrijeme prikazan je u tablici 7.2.

$t/s$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$s/cm$	0	2,2	4,6	7,2	10	13	16,2	19,6	23,3	27,1	31,1

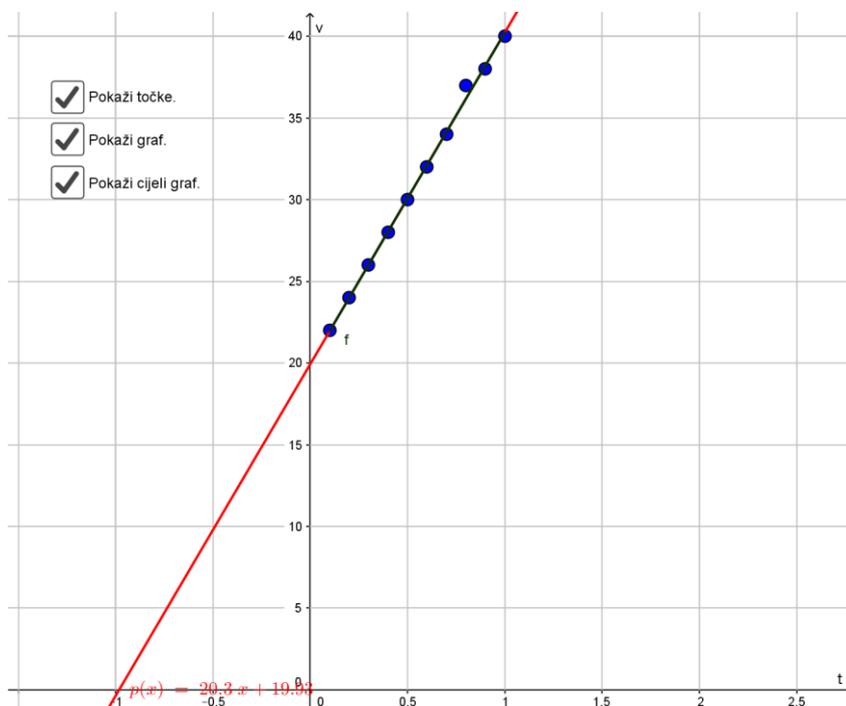
Tablica 7.2. Put kolica

**Zadatak 5.** Nacrtajte  $s-t$  grafički prikaz ovoga gibanja.

Isto kao što su učenici radili kod primjera 1, sada rade i u ovom slučaju.

**Zadatak 6.** Nacrtajte grafički prikaz brzina – vrijeme tog gibanja.

Tijelo u ovom slučaju ima početnu brzinu  $v_0$ , što se dobro vidi jer  $v-t$  grafički prikaz ne kreće iz ishodišta.



Slika 7.2.  $v-t$  grafički prikaz

**Zadatak 7.** Prepoznajte ovisnost prikazanih veličina.

Učenici s grafičkog prikaza mogu pročitati vrijednost početne brzine, a već im je od ranije poznato da nagib pravca na tom prikazu određuje vrijednost akceleracije.

**Zadatak 8.** Nacrtajte grafički prikaz akceleracija – vrijeme toga gibanja.

Nakon grafičkog prikaza u GeoGebri možemo s učenicima razgovarati o povezanosti između algebarskih izraza za jednoliko ubrzano gibanje bez početne brzine i s početnom brzinom s napravljenim grafičkim prikazima.

**Zadatak 9.** Napravite aplet s promjenjivim veličinama: početna brzina i akceleracija te proučavajte izgled  $s-t$  i  $v-t$  grafičkih prikaza.

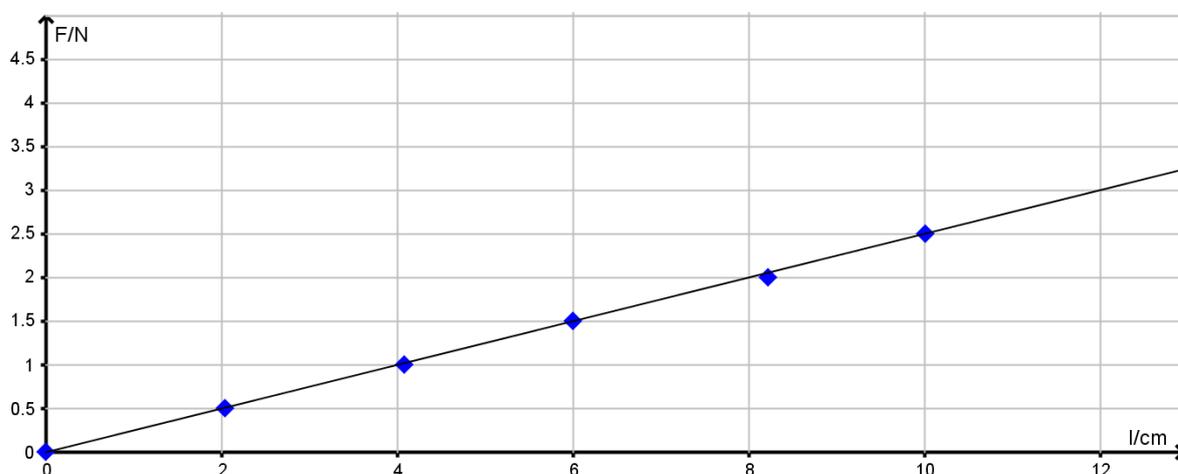
NAPOMENA: U  $v-t$  grafičkom prikazu prijedeni put predstavlja površinu omeđenu grafom ovisnosti brzine o vremenu i proteklim vremenompa mogu to i dokazati izračunavajući površinu.

## 7.2. Elastična sila i određivanje konstante elastičnosti opruge – GeoGebra

**Zadatak 1.** Napravite grafički prikaz sila – produljenje na temelju podataka iz tablice 7.3.

$F/N$	$\Delta l/cm$
0	0
0,5	2,04
1	4,08
1,5	6
2	8,22
2,5	10,01

Tablica 7.3. Srednje produljenje



Slika 7. 3. Ovisnost sile o produljenju opruge

S učenicima dogovorimo raspored koordinatnih osi tako da sada mogu samostalno raditi, unositi podatke iz tablice i crtati grafički prikaz. Prvo neka ucrtaju točke, zatim graf, a potom neka nađu funkciju koja opisuje ovu ovisnost.

**Zadatak 2.** Kakva je ovisnost sile o produljenju opruge?

Možete li iz grafičkog prikaza odrediti kolika sila uzrokuje produljenje od 15 cm i koliko će biti produljenje ako je uzrokovano silom od 4 N?

Učenici trebaju prepoznati da se radi o linearnoj ovisnosti, tj. proporcionalnosti između veličina.

**Zadatak 3.** Odredite konstantu elastičnosti opruge pomoću grafičkog prikaza u GeoGebri.

Učenici bi trebali uočiti da trebaju odrediti koeficijent smjera pravca koji pokazuje linearnu ovisnost između sile i produljenja opruge.

Koeficijent smjera ili nagib pravca mogu odrediti uzimajući koordinate dvije točke na  $F - \Delta l$  grafu i  $nagib = \frac{F_2 - F_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1}$ , gdje prva odabrana točka ima koordinate  $(F_1, \Delta l_1)$ , a druga  $(F_2, \Delta l_2)$ .

**Zadatak 4.** Napravite grafički prikaz sila – produljenje koristeći se podacima koji se nalaze u tablici 5.11.

Postupak je isti kao i u zadatku 1.

**Zadatak 5.** Odredite koeficijent elastičnosti opruge pomoću grafičkog prikaza u zadatku 4.

**Zadatak 6.** Usporedite izgled grafa iz zadatka 1. i zadatka 4. Što možemo zaključiti iz tih grafova?

Ovdje će biti mnogo lakše zaključiti o ovisnosti produljenja, konstante elastičnosti i sile.

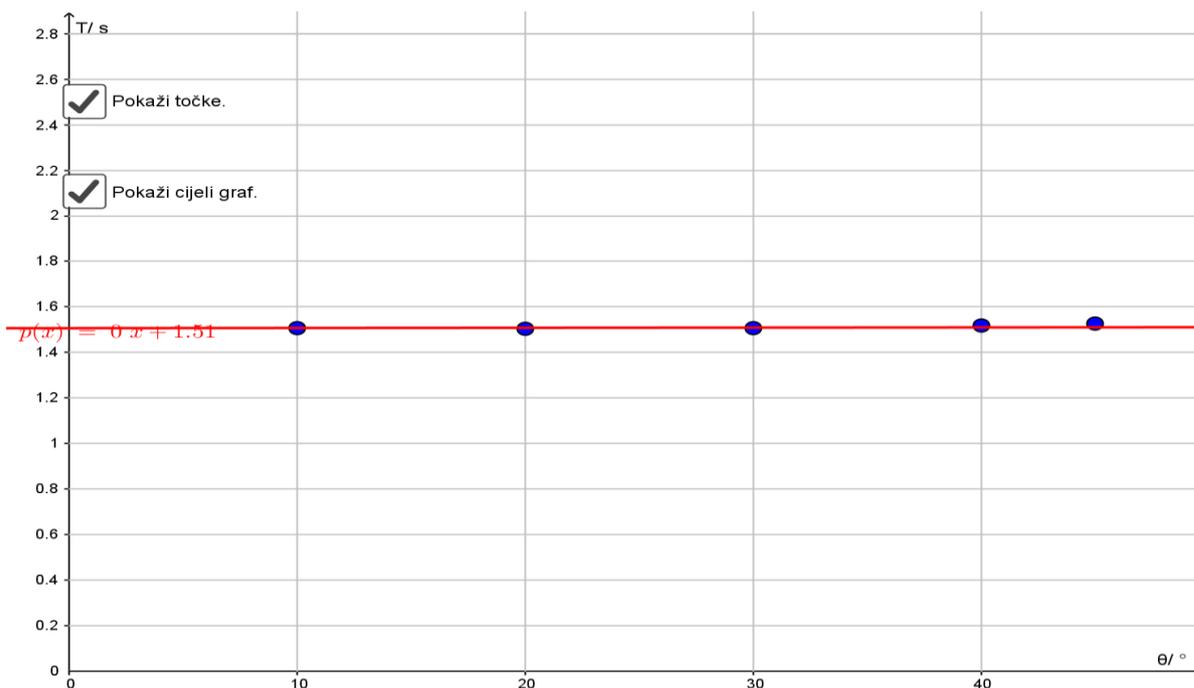
**Zadatak 7.** Napravite aplet sa silom kao promjenjivom veličinom te proučavajte kako će izgledati  $k - \Delta l$  grafički prikaz.

### 7.3. Period jednostavnog njihala – GeoGebra

**Zadatak 1.** Istražite kako period  $T$  ovisi o amplitudi, odnosno o kutu  $\theta$  za danu masu njihala. Ovisnost  $T - \theta$  prikažite grafički na temelju podataka iz tablice 7.4.

$\theta / ^\circ$	$T / s$
50	1,492
40	1,518
30	1,506
45	1,528
20	1,504
10	1,508

Tablica 7.4. Ovisnost perioda u kutu otklona



Slika 7.4. Ovisnost perioda o kutu odklona

S učenicima prvo dogovorimo razmještaj koordinatnih osi, a zatim koriste podatke iz tablice da bi napravili grafički prikaz. Neka prvo ucrtavaju točke, a zatim mogu prikazati graf. Na osnovi algebarskog izraza koji su dobili pri prikazivanju ove ovisnosti u koordinatnom sustavu, mogu vidjeti da je period neovisan o kutu jer je koeficijent smjera pravca 0, a ako usporede srednju vrijednost koju su izračunali ranije, vidjeti će da je to u ovom slučaju 1,51.

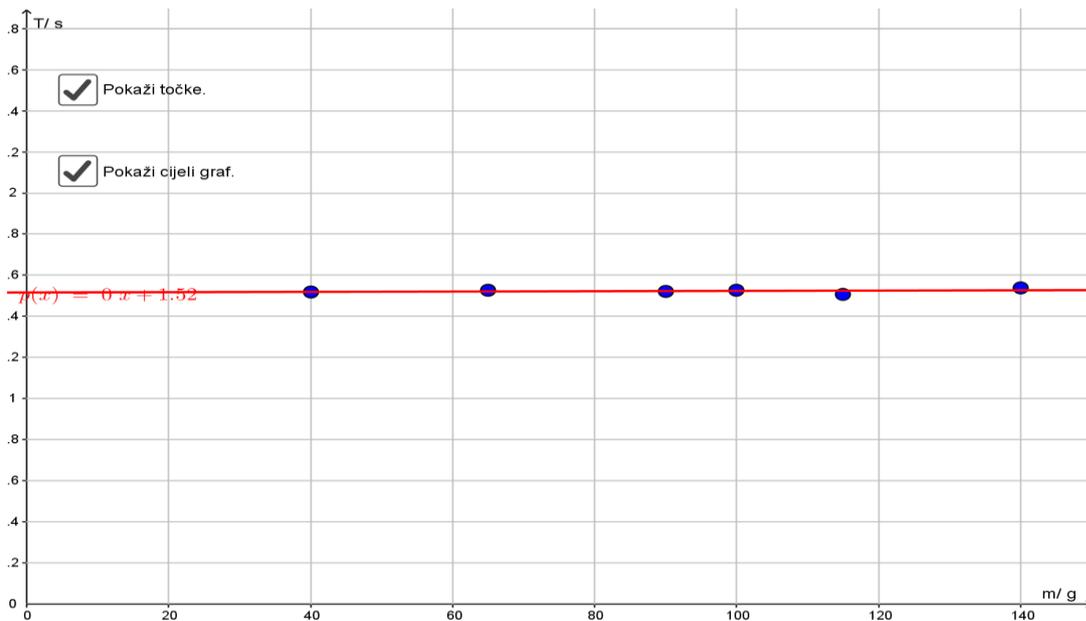
Do ovoga svega nastavnik treba doći razgovorom s učenicima.

Možemo od učenika tražiti da naprave aplet s kutom kao klizačem, da se provjeri da nema nikakvoga utjecaja na period.

**Zadatak 2.** Kako period  $T$  ovisi o masi  $m$  njihala za danu duljinu  $l$ ? Prikažite tu ovisnost grafički.

$m/g$	$T/s$
40	1,518
65	1,528
90	1,522
115	1,506
140	1,538
100	1,526

Tablica 7.5. Ovisnost perioda o masi



Slika 7.5. Ovisnost perioda o masi

Kao i u prethodnom zadatku i ovdje dobivamo stalnu vrijednost perioda bez obzira na masu tijela obješenog o niti njihala.

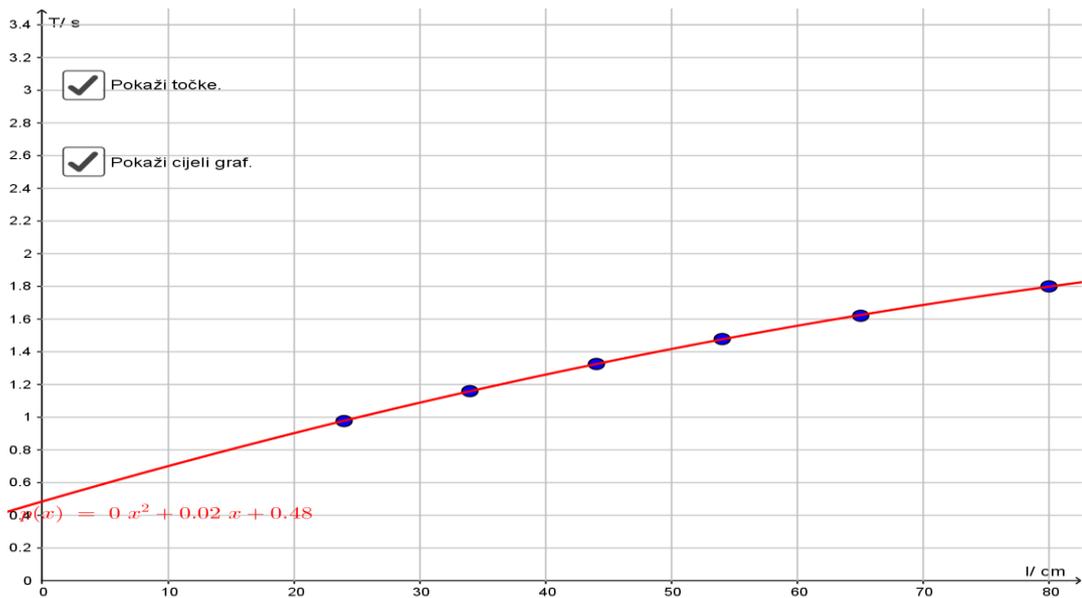
Neka učenici naprave aplet koji sada ima masu za promjenjivu veličinu da vide tu neovisnost i za druge vrijednosti masa.

Uspoređivanjem srednje vrijednosti perioda, koji smo izračunali u dijelu 5.4., vidjet ćemo podudarnost s odsječkom pravca na  $y$ -os.

**Zadatak 3.** Istražite kako period  $T$  ovisi o duljini njihala  $l$  za danu masu njihala. Nacrtajte ovisnost  $T - l$ , a zatim i ovisnost  $T^2 - l$  i ovisnost  $T - \sqrt{l}$  u GeoGebri upotrebom podataka iz tablice 7.6.

$l/\text{cm}$	$T/\text{s}$	$T^2/\text{s}^2$
54	1,476	2,179
44	1,326	1,758
34	1,16	1,346
24	0,976	0,953
65	1,62	2,624
80	1,8	3,24

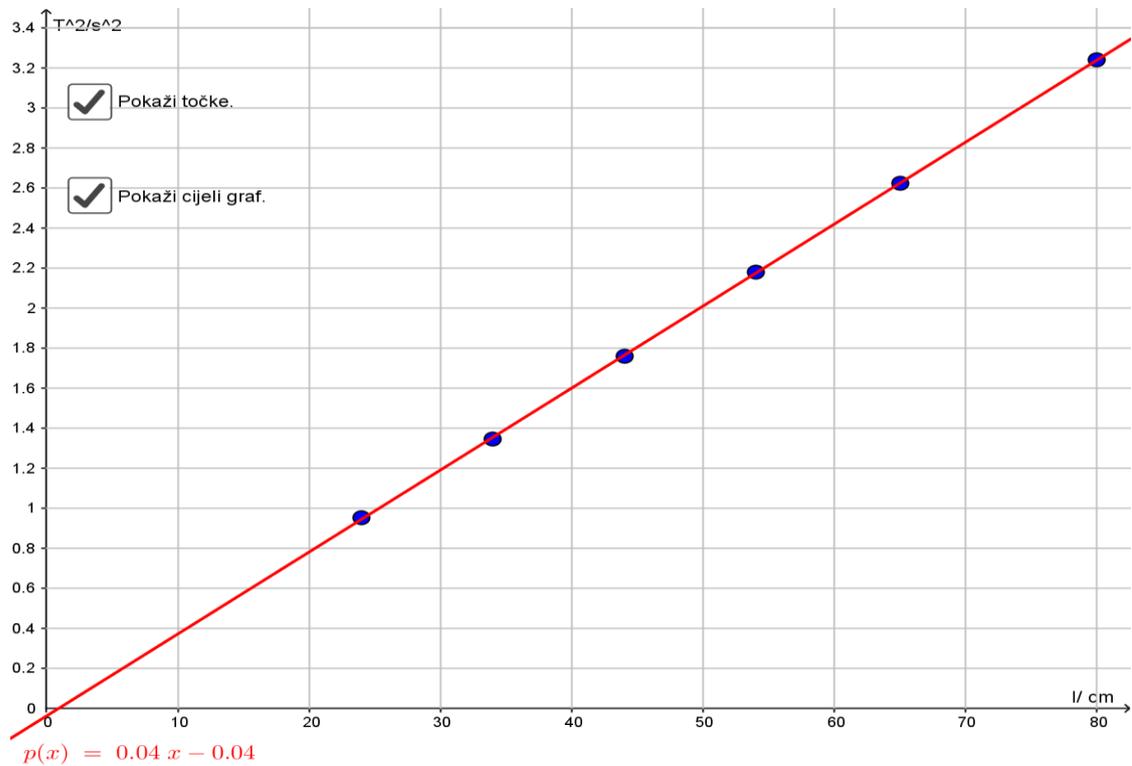
Tablica 7.6. Ovisnost perioda o duljini niti



Slika 7.6. Ovisnost perioda o duljini

Na ovom prikazu možemo vidjeti da ovisnost nije linearna, nego kvadratna, vidljivo na slici. Iz tog razloga napravimo sada još jedan prikaz u GeoGebri uzimajući kvadrat perioda umjesto perioda kao zavisnu veličinu.

Na grafičkom prikazu postaje linearna ovisnost.



Slika 7.7. Ovisnost kvadrata perioda o duljini

Učenicima ostaje sada još da naprave ovisnost  $T - \sqrt{l}$  gdje ćemo također vidjeti tu linearnost.

**Zadatak 4.** Napravite aplet s duljinom niti kao promjenjivom veličinom i promatrajte što se događa s periodom ili kvadratom perioda.

NAPOMENA: Sve zadatke učenici trebaju raditi tako da prvo prenesu podatke iz tablice, crtaju točke, spajaju ih i traže funkciju.

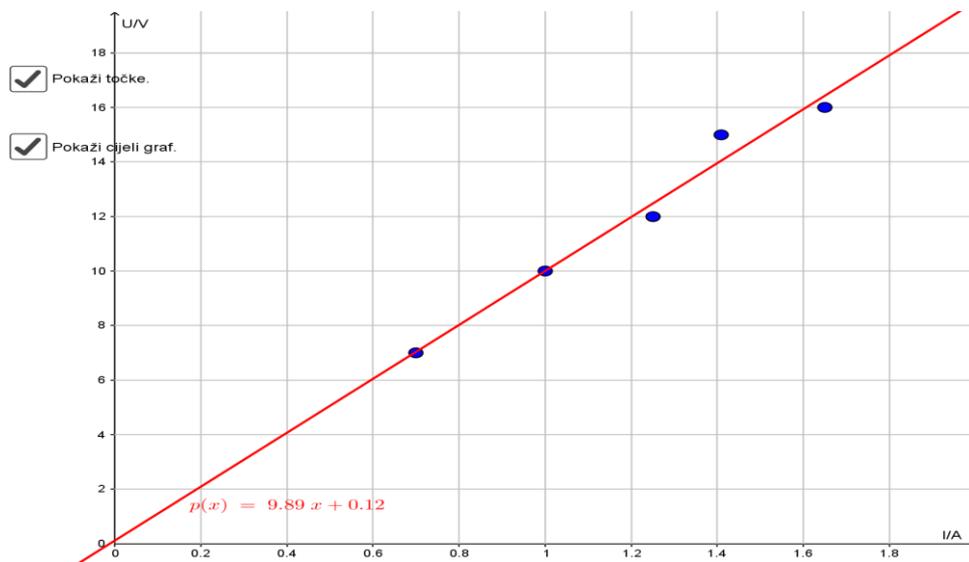
## 7.4. Električni otpor – GeoGebra

**Zadatak 1.** Koristeći vrijednosti električnog napona ( $U$ ) i električne struje ( $I$ ) iz tablice 7.7. nacrtajte u GeoGebri grafički prikaz. Objasnite kakva je ovisnost između električnog napona i električne struje.

$U/V$	7	10	12	15	16
$I/A$	0,70	1,00	1,25	1,41	1,65

Tablica 7.7. Vodič 1

Uvijek je dobro da nastavnik s učenicima na početku rada na određenoj fizičkoj pojavi raspravi koja je nezavisna, a koja zavisna veličina, kako će izgledati koordinatni sustav. Nakon toga možemo pustiti učenike da sami rade zadatke koji su predviđeni u određenoj temi.



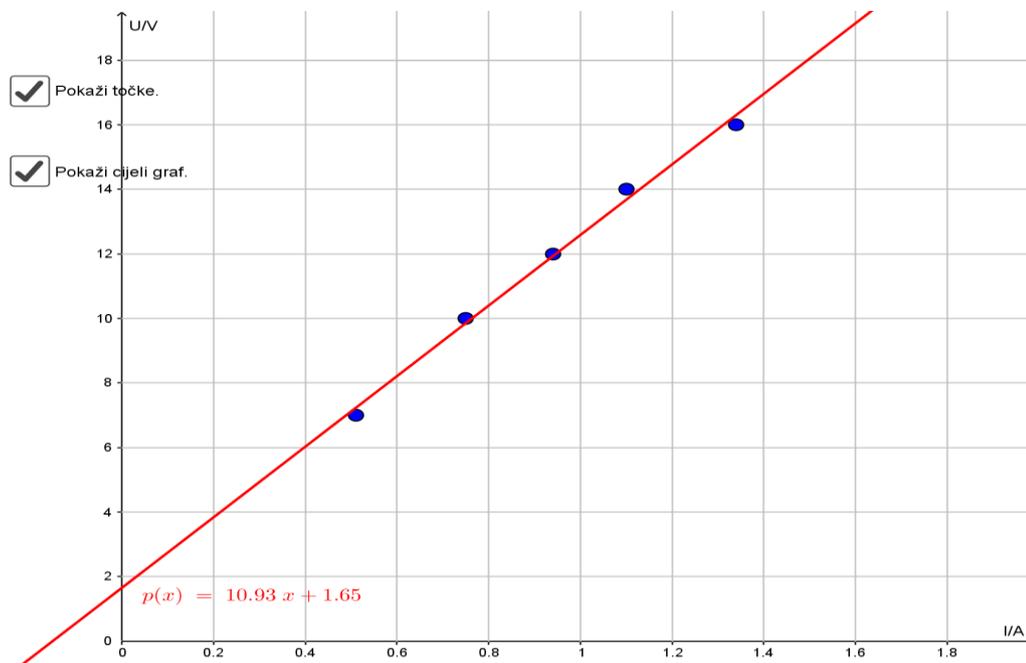
Slika 7.8. Ovisnost električnog napona o električnoj struji – vodič 1

Usporedbom izgleda grafa u GeoGebri i nagiba pravca sa srednjom vrijednošću električnog otpora koji smo izračunavali vidimo vrlo dobru podudarnost u rješenjima.

**Zadatak 2.** U električni strujni krug, za koji su izmjereni podatci dani u tablici 7.8., uključen je vodič nepoznata otpora. Prikažite pomoću GeoGebre ovisnost električnog napona o električnoj struji, odredite na osnovi toga prikaza koliki je nepoznati električni otpor.

$U/V$	7	10	12	14	16
$I/A$	0,51	0,75	0,94	1,1	1,34

Tablica 7.8. Vodič 2



Slika 7.9. Ovisnost električnog napona o električnoj struji – vodič 2

Iz ovoga grafičkog prikaza učenici mogu zaključiti da je električni otpor koeficijent proporcionalnosti između električnog napona i električne struje, tj.  $U = R \cdot I$ .

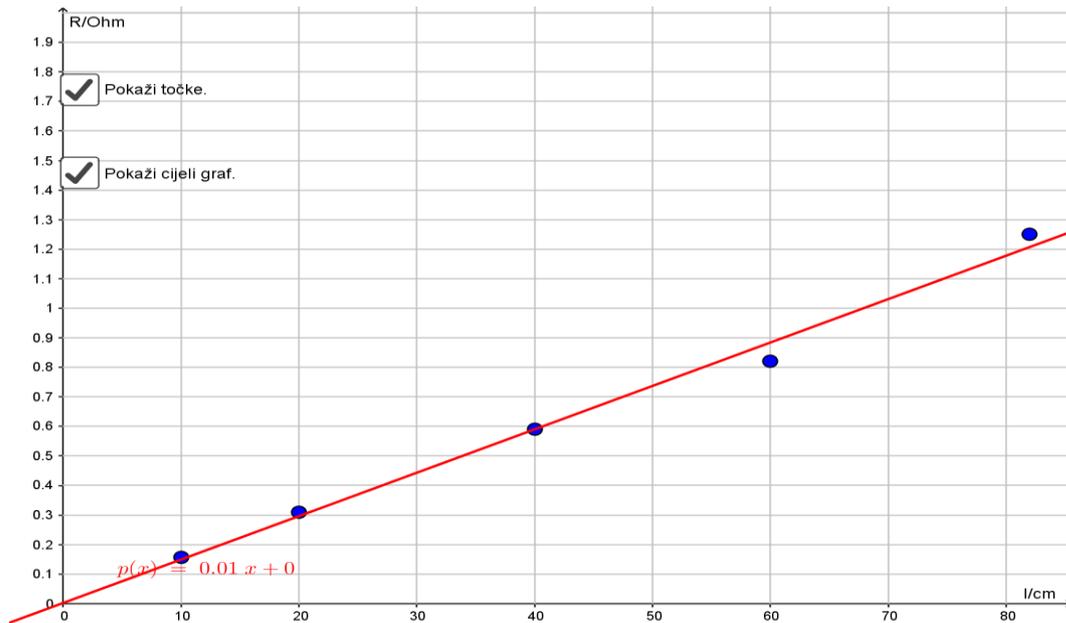
**Zadatak 3.** Napravite aplet u kojem je otpor promjenjiva veličinate proučavajte što se događa s ostalim veličinama,  $U$  i  $I$ .

Možemo učenicima dati zadatak da naprave  $I - U$  grafički prikaz, da vide kakva je onda ovisnost.

**Zadatak 4.** Nacrtajte grafički prikaz koji pokazuje ovisnost električnog otpora vodiča o njegovoj duljini koristeći se podacima u tablici 7.9. Kako izgleda ta ovisnost?

$l/m$	$R/\Omega$
0,82	1,25
0,60	0,82
0,40	0,59
0,20	0,31
0,10	0,157

Tablica 7.9. Ovisnost električnog otpora o duljini vodiča za željezo

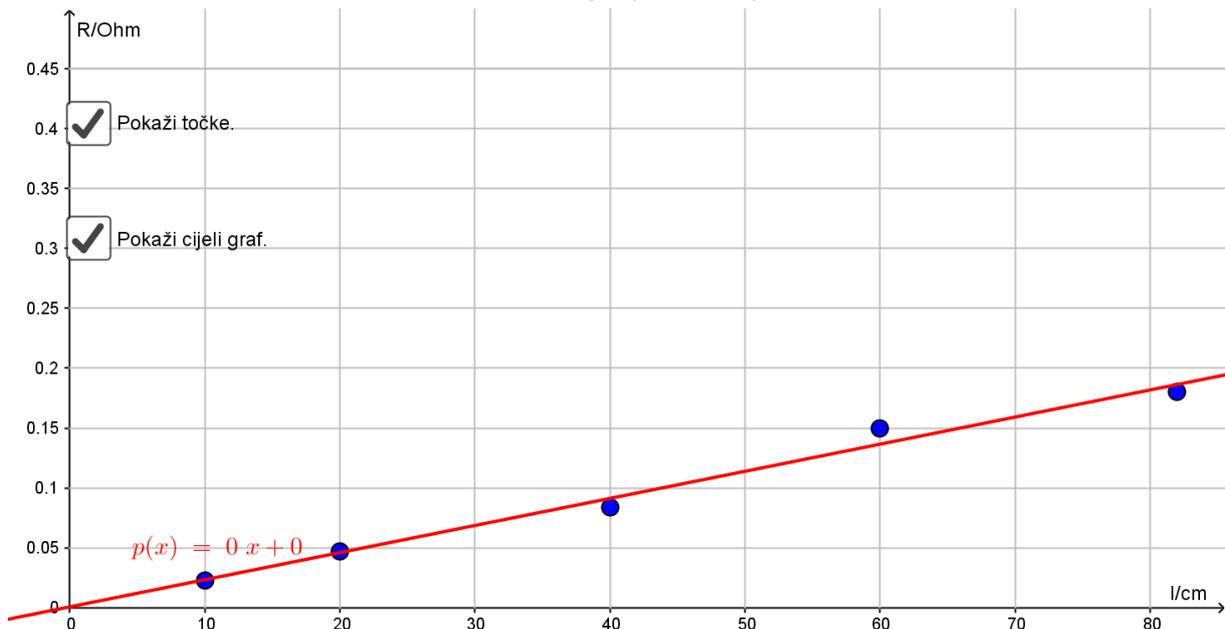


Slika 7.10. Ovisnost električnog otpora o duljini vodiča za željezo

**Zadatak 5.** Nacrtajte uz pomoć GeoGebre grafički prikaz koji pokazuje ovisnost električnog otpora vodiča od bakra o njegovoj duljini; podatci su u tablici 7.10. Usporedite ovaj grafički prikaz s prethodnim, vodič od željeza i bakra istog su poprečnog presjeka.

$l/cm$	82	60	40	20	10
$R/\Omega$	0,18	0,15	0,084	0,047	0,023

Tablica 7.10. Ovisnost električnog otpora o duljini vodiča za bakar



Slika 7.11. Ovisnost električnog otpora o duljini vodiča za bakar

Ovisnost je linearna, ali je ovdje nagib pravca koji prikazuje tu ovisnost manji, što bi učenicima trebalo značiti da bakar ima manju vrijednost električnog otpora, što nekako upućuje na to da električni otpor ima veze s vrstom materijala od kojeg je vodič napravljen.

**Zadatak 6.** Nacrtajte u GeoGebri grafički prikaz koji pokazuje ovisnosti električnog otpora vodiča od bakra o površini poprečnog presjeka s podacima iz tablice 7.10. Kakva je ovisnost između veličina? Koja tablica a) ili b) daje linearnu ovisnost?

$S/m^2$	$R/\Omega$
$1,018 \cdot 10^{-7}$	0,11
$2,036 \cdot 10^{-7}$	0,05
$1,54 \cdot 10^{-6}$	0,008
$7,07 \cdot 10^{-8}$	0,15

a)

$R/\Omega$	0,008	0,05	0,11	0,15
$\frac{1}{S} / m^{-2}$	$0,65 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^6$	$9,8 \cdot 10^6$	$14,14 \cdot 10^6$

b)

Tablica 7.11. Ovisnost električnog otpora o površini poprečnog presjeka

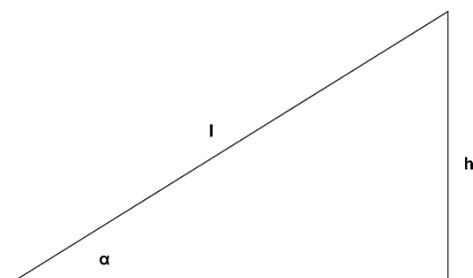
Na temelju ovoga zadnjeg zadatka učenici mogu doći do zaključka o kojim sve veličinama ovisi električni otpor jednoga vodiča. Tu se možemo nadovezati na ono što smo zaključili kada smo proučavali linearnu funkciju u fizikalnim eksperimentima.

**Zadatak 7.** Napravite aplet u kojem mijenjanjem vrijednosti električnog otpora proučavamo kolika mora biti duljina i površina poprečnog presjeka vodiča.

## 8. VEKTORI U FIZIKALNIM EKSPERIMENTIMA U GEOGEBRI

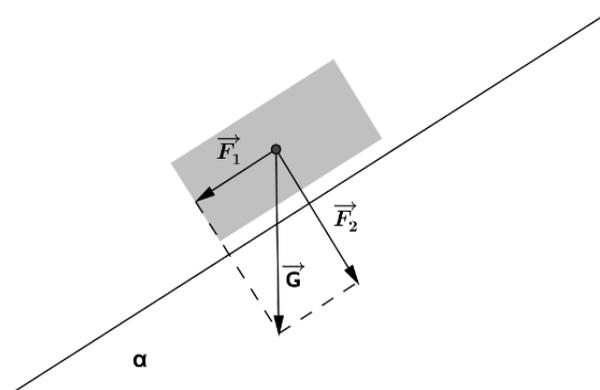
### 8.1. Rastavljanje sile na kosini na njezine komponente – GeoGebra

**Zadatak 1:** Nacrtajte u umanjenom mjerilu u GeoGebri kosinu duljine 95 cm, a visine 20 cm.



Slika 8.1. Kosina

**Zadatak 2:** Na kosini iz zadatka 1. stoji tijelo težine  $G = 7,5$  N. Grafički rastavite težine toga tijela na njezine komponente  $|\vec{F}_1|$  paralelnu s kosinom i  $|\vec{F}_2|$  okomitu na podlogu kosine. Očitajte njihove iznose.



Slika 8.2. Tijelo na kosini

Nakon očitavanja iznosa sile trebalo bi te rezultate usporediti s rezultatima za srednju vrijednost komponente sile teže,  $|\vec{F}_1|$  paralelne s kosinom i  $|\vec{F}_2|$  okomite na podlogu kosine, a koju smo izračunali na osnovi podataka iz tablice 8.1.

$F_1/\text{N}$	1,6	1,8	1,6	1,8	1,7
$F_2/\text{N}$	7,3	7,4	7,2	7,5	7,1

Tablica 8.1. Komponente sile

**Zadatak 3.** Napravite aplet u kojem su promjenjive veličine duljina i visina kosine te promatrajte kako se mijenjaju iznosi komponenti sile teže,  $|\vec{F}_1|$  paralelne s kosinom i  $|\vec{F}_2|$  okomite na podlogu kosine.

**Zadatak 4.** Napravite aplet tako da tijelo postavite na vrh kosine. Ono će se gibati ubrzanjem  $a = g \sin \alpha$  ako nema sile trenja, zbog utjecaja komponente sile teže  $|\vec{F}_1|$  paralelne s kosinom. Napravite animaciju gibanja tijela.

Za one koji žele više:

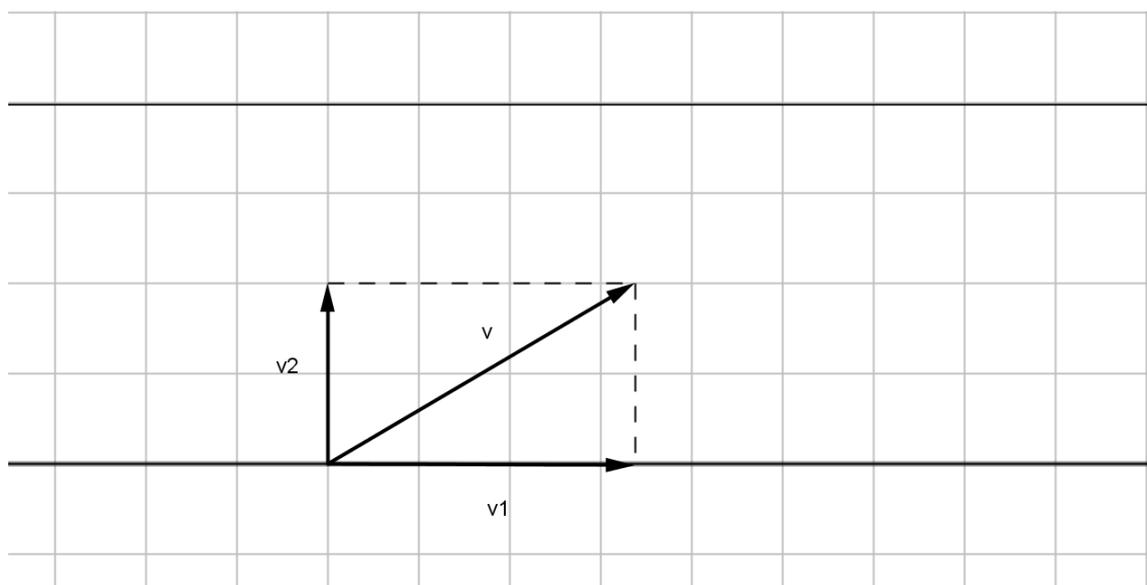
**Zadatak 5.** Napravite aplet kao u zadatku 4. tako da možete mijenjati iznos koeficijenta trenja od 0 do 1 te animirajte takvo gibanje.

Sila trenja je suprotne orijentacije od komponente sile teže,  $|\vec{F}_1|$  paralelne s kosinom. Izračunava se prema izrazu:

$$F_{tr} = \mu |\vec{F}_2| = \mu mg \cos \alpha, \mu \text{ je koeficijent trenja.}$$

## 8.2. Složena gibanja – GeoGebra

**Zadatak 1.** Rijeka je široka 85 metara, a brzina njezina toka  $5 \text{ m s}^{-1}$ . Skiper je svoj čamac usmjerio okomito na obalu te se kreće brzinom  $8 \text{ m s}^{-1}$ . Kolika će biti njegova stvarna brzina i koje orijentacije u odnosu na tok rijeke? Nacrtajte vektore brzina u GeoGebri s njihovim smjerovima, orijentacijama i iznosima.



Slika 8.3. Vektori brzina

**Zadatak 2.** Napravite aplet tako da promjenjive veličine budu brzina čamca i brzina rijeke s obzirom na iznos.

- Kako iznos brzine toka rijeke utječe na promjenu ukupne brzine gibanja čamca?
- Kako iznos brzine čamca utječe na ukupnu brzinu?

**Zadatak 3.** Napravite aplet tako da brzina toka rijeke i brzina čamca ne budu međusobno okomite.

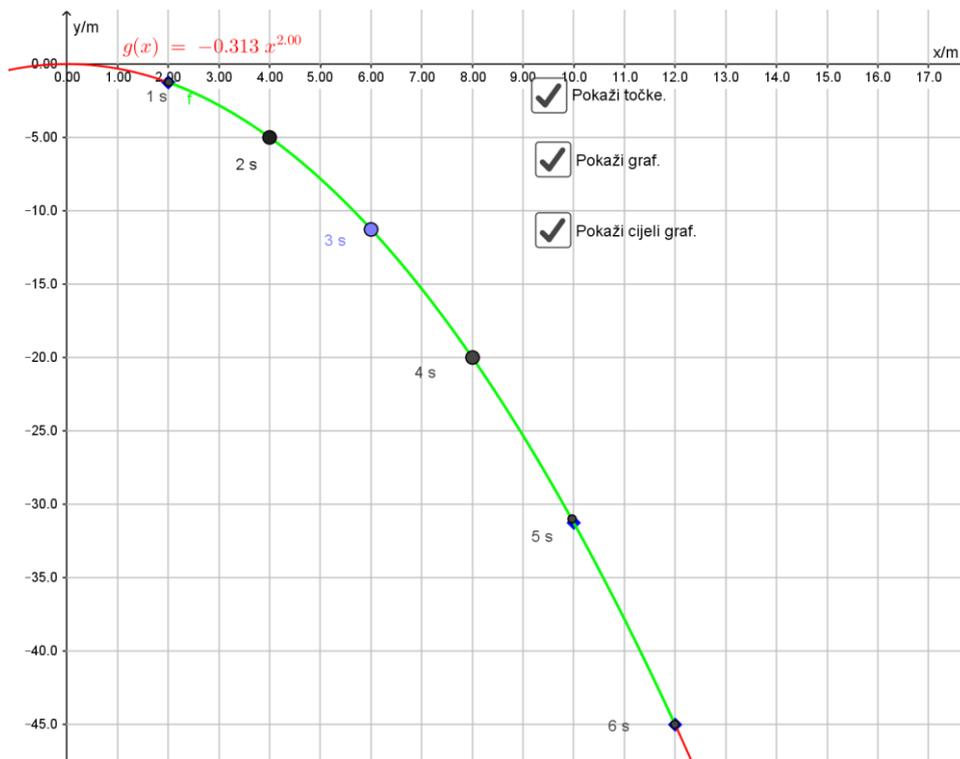
- a) Kako međusobni smjer brzina utječe na ukupnu brzinu?
- b) Kada je najveća, a kada najmanja brzina kretanja broda?

**Zadatak 4.** Avion je krenuo iz Osijeka prema istoku brzinom  $600 \text{ km h}^{-1}$ , a zatim je skrenuo nakon 2 sata na sjever i kretao se brzinom  $800 \text{ km h}^{-1}$  još 3 sata.

- a) Nacrtajte brzine njegova gibanja u GeoGebri.
- b) Kolika mu ukupna brzina gibanja? Rj:  $536,66 \text{ km h}^{-1}$
- c) Koliko je skrenuo od prvobitnog smjera gibanja (istoka)? Rj:  $63,43^\circ$
- d) Kolika je udaljenost od početnog mjesta gibanja? Rj:  $2683,28 \text{ km}$

### HORIZONTALNI HITAC

**Zadatak 5.** Tijelo je izbačeno s visine od  $45 \text{ m}$  s početnom brzinom  $2 \text{ m s}^{-1}$  u horizontalnom smjeru. Nacrtajte u GeoGebri putanju tijela s položajem tijela za svaku sekundu gibanja.



Slika 8.4. Putanja tijela pri horizontalnom hicu

**Zadatak 6.** Napravite aplet tako da mijenjate početnu brzinu te promatrajte na koji se način giba tijelo (koliko daleko pada od podnožja, koliko dugo leti).

**Zadatak 7.** Napravite aplet tako da mijenjate visinu s koje je tijelo izbačeno te ponovno promotrite što će se dogoditi s gibanjem tijela.

Učenici trebaju uvidjeti da iznos početne brzine nema utjecaja na vrijeme padanja, nego visina s koje je tijelo izbačeno, a ima utjecaj na to koliko daleko će otići tijelo od podnožja mjesta s kojeg je izbačeno.

**Zadatak 8.** Na putanju tijela dodajte vektore brzina u horizontalnom i vertikalnom smjeru za svaku sekundu gibanja te nađite ukupnu brzinu za svaki položaj.

Za one koji žele više:

Nacrtajte putanju tijela u GeoGebri i vektore brzina za kosi hitac koji se ispaljuje s neke visine; dakle tijelo ima početnu brzinu, ali sada ne u horizontalnom smjeru, nego pod nekim kutom u odnosu na horizontalu.

Kosi hitac možete pogledati na stranicama:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/projectile-motion>

[http://www.walter-fendt.de/ph6en/projectile\\_en.htm](http://www.walter-fendt.de/ph6en/projectile_en.htm)



## LITERATURA

- [1] Andreis, T., Plavčić, M., Simić, N. Fizika 1, udžbenik za 1. razred gimnazije i srodnih škola s četverogodišnjim programom, 2. izdanje, Zagreb, Profil, 2002.
- [2] Andreis, T., Plavčić, M., Simić, N. Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije i srodnih škola s četverogodišnjim programom, Zagreb, 2. izdanje, Zagreb, Profil, 2002.
- [3] Antončić, N., Špalj, E., Antoliš, S., Volenec, V., Matematika 3, udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred opće, jezične i klasične gimnazije, drugi dio, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [4] Brković, N. Zbirka zadataka iz fizike, Zagreb, LUK d.o.o., 2001.
- [5] Čavlović, I., Lapaine, M., Matematika 3, udžbenik za 3. razred četverogodišnje strukovne škole, drugi dio, Školska knjiga, Zagreb, 2005.
- [6] Dakić, B., Nagib pravca, Miš, Zagreb, 2000. (5. 12. 2015.)
- [7] Dakić, B., Elezović, N., Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.
- [8] Dakić, B., Elezović, N., Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2014.
- [9] Dakić, B., Elezović, N., Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2014.
- [10] Gusić, I., Krajina, J., Matematika 1, udžbenik za četverogodišnje strukovne škole, drugi dio, Školska knjiga, Zagreb, 2005.
- [11] Horvat, D., Hrupec, D. Fizika 1, Pojmovi i koncepti: udžbenik s multimedijским sadržajem za 1. razred gimnazija, Zagreb, Neodidacta d.o.o., 2010.
- [12] Horvat, D., Hrupec, D. Fizika 2, Pojmovi i koncepti: udžbenik s multimedijским sadržajem za 2. razred gimnazija, Zagreb, Neodidacta
- [13] Horvat, D., Hrupec, D. Fizika 3, Pojmovi i koncepti: udžbenik s multimedijским sadržajem za 3. razred gimnazija, Zagreb, Neodidacta
- [14] Krsnik, R., Mikuličić, B. Fizika 3: međudjelovanja, relativnost, titranja i zvuk, Zagreb, Školska knjiga, 1995.
- [15] Labor, J. Fizika 1, udžbenik za 1. razred gimnazije, Zagreb, Alfa, 2014.
- [16] Labor, J. Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije, Zagreb, Alfa, 2014.
- [17] Labor, J. Fizika 3, udžbenik za 3. razred gimnazije, Zagreb, Alfa, 2014.
- [18] Mikuličić, B. Fizika Gibanje i energija, Svezak B, radni udžbenik fizike za srednje usmjereno obrazovanje, 3. izdanje, Zagreb, Školska knjiga, 1987.
- [19] Paar, V. Fizika 1, udžbenik za 1. razred gimnazije, 13. izdanje, Zagreb, Školska knjiga, 2006.
- [20] Paar, V., Šips, V. Fizika 2, udžbenik za 2. razred gimnazija, Zagreb, Školska knjiga, 2007.

- [21] Šikić, Z., Bujan – Slamić, I., Crnković, M., Germin Mileta, R., Jeličić, Lj., Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za 3. razred gimnazije i tehničke škole, drugi dio, Profil, Zagreb, 2014.
- [22] Šikić, Z., Kalezić, R., Lukač, S., Palanović, B., Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred gimnazije i tehničke škole, drugi dio, Profil, Zagreb, 2014.
- [23] Vernić, E., Mikuličić, B. Vježbe iz fizike, priručnik za laboratorijski rad učenika srednjih škola, 4. izdanje, Zagreb, Školska knjiga, 1984.
- [24] Vernić, E., Liščić, B., Šindler, G., Fizika 1 Mehanika i toplina, 9. izdanje, Školska knjiga, 1981.
- [25] URL: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), lipanj – rujan 2016.
- [26] URL: [http://www.walter-fendt.de/ph6en/projectile\\_en.htm](http://www.walter-fendt.de/ph6en/projectile_en.htm), kolovoz 2016.
- [27] URL: <https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/projectile-motion>, rujan 2016.
- [28] URL: <http://physics.mef.hr/webpraktikum/strujnikr/Page1.php>, rujan 2016.